Ednei Luís Becher
Lisandro Bitencourt Machado
(Orgs.)

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA:
COMPARTILHANDO PRÁTICAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

INSTITUTO FEDERAL
Rio Grande do Sul

Ednei Luís Becher
Lisandro Bitencourt Machado
(*Organizadores*)

Laboratório de Ensino de Matemática: Compartilhando práticas na formação de professores

São Paulo
Pragmatha
2021

Pragmatha Editora
www.pragmatha.com.br

Edição: Sandra Veroneze
Identidade Visual: Pragmatha
Capa: Augusto de Mattos Machado
Diagramação: Luccas Pozzada

O conteúdo e opiniões manifestadas nos capítulos é de responsabilidade dos seus respectivos autores

Esta obra tem o apoio do IFRS - *Campus* Osório, realizada por intermédio do fomento do Edital IFRS Nº 09/2021 - Auxílio à Publicação de Produtos Bibliográficos. Publicação destinada a fins educacionais e não pode ser comercializada.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

L123 Laboratório de Ensino de Matemática compartilhando práticas na formação de professores / Ednei Luís Becher, Lisandro Bitencourt Machado (Organizadores). -- 1.ed.-- São Paulo, SP : Pragmatha, 2021.
103 p.

ISBN 978-65-86734-44-7

1. Professores - Formação. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Sequência didática. I. Becher, Ednei Luís, org. II .Machado, Lisandro Bitencourt, org. III. Título.

CDU: Ed. (online) -- 371.13:51
Catalogação na publicação: Aline Terra Silveira – CRB 10/1933

Sumário

Apresentação

Esta obra surge da necessidade identificada nas disciplinas de prática, desenvolvidas durante o curso de Licenciatura em Matemática do Campus Osório do Instituto Federal do Rio Grande do Sul, nas quais os estudantes precisam descontruir seus pré-conceitos sobre a Matemática, sobre seu ensino e sobre a docência, para irem gradativamente elaborando novas concepções e convicções sobre como se aprende e se ensina Matemática, qual o papel do professor neste processo e como ele se constitui e se forma professor durante a sua formação.

Desta forma, esta obra é constituída por cinco capítulos que buscam oferecer uma visão inicial aos estudantes de graduação. Os dois primeiros capítulos oferecem indicações de possíveis caminhos que podem ajudá-los a compreender o seu processo de formação e o papel do Laboratório de Ensino de Matemática na prática do professor.

O primeiro aborda a importância do laboratório de ensino de Matemática na formação dos professores, oferecendo uma ampla perspectiva sobre possibilidades de uso, destacando as atividades exploratórias, jogos e as possibilidades interdisciplinares.

No segundo capítulo se apresenta o conceito de zona de desenvolvimento proximal profissional docente (ZPTD), um construto que pode servir de base para compreender-se o processo de desenvolvimento e aprendizado vivenciado pelos graduandos e, na sequência busca-se evidenciar o papel das disciplinas de Laboratório na formação dos futuros professores.

Os três últimos capítulos são sequências didáticas, com concepções diferentes de ensino e aprendizagem, elaboradas por estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Campus Osório – IFRS.

A primeira sequência apresentada no capítulo 3 enfoca conteúdos de Estatística e propõe o ensino a partir de atividades exploratórias com o uso de softwares. Nela se preconiza o uso de dados reais e o trabalho independente dos estudantes, quer seja individual ou em grupo.

No capítulo 4 é apresentada uma sequência que propõe o ensino de geometria a partir de construções com régua e compasso. Cabendo destacar que para as autoras é importante a exploração das diferentes formas de representação e o papel instigador do professor.

A última sequência, apresentada no capítulo 5, aborda a temática da análise combinatória, apresentando um conjunto de atividades potencialmente significativas para os estudantes, baseando-se em situações familiares a eles.

Espera-se que este livro possa servir aos alunos da disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática I, fornecendo uma visão geral sobre o espaço Laboratório de Matemática, sobre o processo de formação de um professor e, ao mesmo tempo, apresentar-lhes exemplos de sequências didáticas elaboradas sob diferentes concepções e com o uso de diferentes metodologias e recursos.

O Laboratório de Ensino de Matemática na construção do conhecimento matemático

Lisandro Bitencourt Machado
Liliani de Souza Pinheiro
Leonardo Pospichil Lima Neto

Nas salas de aula uma realidade dura enfrentada pelos professores de matemática é a baixa receptividade por parte dos educandos e, porque não dizer, a "tristeza" ao saberem que se iniciará em instantes a aula de matemática. É evidente que não é uma regra geral, e que existem docentes que são tratados como verdadeiros heróis quando adentram em determinadas salas de aula, porém o que mais se impõe é um certo distanciamento, uma preocupação, um medo, que está presente nos corredores das nossas escolas da educação básica. E por que isso acontece?

A discussão a esse respeito não é pequena e tampouco atual, esse receio das aulas de matemática tem sido tema de inúmeros estudos com as mais variadas metodologias e amplitudes. Com frequência o papel essencial do professor de matemática surge como o fator mais relevante. Mas o que nos questionamos é, o problema é o professor de matemática, a própria matemática ou a aprendizagem da matemática?

No momento em que lidamos com essas questões é imprescindível que analisemos o ponto que pode ser explorado, as ideias que podem ser levantadas para que possamos desmistificar o ensino de matemática, e quem sabe, assim, apresentar algumas alternativas que façam, entre outras coisas, que o professor seja propulsor do desenvolvimento do ensino e aprendizagem.

Uma reflexão que podemos fazer é a de que o professor é um instrumento no que se refere ao ensino e aprendizagem de matemática, mas não no sentido de instrumento-objeto, mas no sentido de ser responsável por ações que possam desencadear o "entusiasmo" pelo aprender a matemática. E esse é um ponto importante, o professor que leciona matemática deve ser capaz de instigar a aprendizagem em matemática a partir de diferentes olhares, construindo junto com seus educandos novas possibilidades e novas alternativas que façam com que todos estejam envolvidos num único propósito, o de aprender.

As principais dificuldades enfrentadas pelos educandos da educação básica no que tange o ensino e aprendizagem de Matemática estão relacionadas com conceitos, processos e procedimentos que envolvam abstração. Nas aulas sempre ouvimos algo sobre "porque tantas letras", "cadê os números", "para que serve isso", ou "onde usarei isso na minha vida", enfim, questões que mostram como o ensino de matemática, por vezes, está desconexo com o cotidiano do estudante. Outro aspecto que também podemos tratar aqui é com relação a dificuldade da transição do concreto para abstrato. Na própria teoria da aprendizagem, podemos citar Piaget, que fala da importância de materiais concretos no desenvolvimento da aprendizagem.

As pesquisas no campo da Educação Matemática vem tratando muito disso, aliás algo que é bastante comum nas pesquisas é discutir a importância de lidarmos com situações do cotidiano, com a utilização de materiais didáticos ou de materiais manipulativos para fazer com que o ensino e aprendizagem de matemática se torne mais efetivo e dinâmico.

Os livros, as pesquisas, os encontros e congressos sobre Educação Matemática propõe o desenvolvimento do ensino de matemática a partir de abordagens construtivistas que valorizem o desenvolvimento dos estudantes e dos seu saber, propiciando além da aprendizagem que os educandos desenvolvam gosto por aprender e estudar matemática. Neste contexto a utilização de um ambiente que propicie esses momentos de reflexão e aprendizado da matemática os Laboratórios de Ensino de Matemática despontam como uma opção viável e muito oportuna.

Laboratório de Ensino de Matemática (LEM)

A preocupação com a melhoria na qualidade do ensino de matemática não é novidade, a busca sobre formas de criar possibilidades didáticas, como as tendências em Educação Matemática, tem se constituído em uma incansável tarefa atribuída a professores e pesquisadores da área. Sendo o Laboratório de Ensino de Matemática um espaço que tem sido considerado extremamente importante para fomentar este tipo de discussão, oferecendo recursos para que estudantes e docentes experimentem outras formas de aprender e ensinar Matemática.

O Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) é um ambiente onde professores e estudantes podem viver mais intensamente o estudo dessa ciência; porém, infelizmente, não é uma realidade em todas as instituições de ensino do nosso país. Possivelmente uma maior penetração deste tipo de espaço nas escolas brasileiras não aconteça devido a própria formação dos docentes, que têm uma formação focada em um fazer matemático que pouco valoriza a experimentação, jogos e materiais didáticos. Outro aspecto recorrente nas instituições de educação básica são as limitações de infraestrutura, o que acaba impossibilitando a criação de um laboratório de ensino de matemática por não existir um espaço físico adequado.

Em algumas instituições de ensino, principalmente as da educação básica, o espaço físico destinado ao LEM é compartilhado com outros espaços da escola, como por exemplo as bibliotecas.

Conforme Lorenzato (2012) o LEM é um espaço especialmente dedicado à criação de situações desafiadoras, no qual o professor deve encontrar um equilíbrio entre o que foi planejado para uma aula e os imprevistos que surgem na prática em virtude dos questionamentos dos alunos durante as aulas.

No entanto, vale ressaltar que não é somente nas escolas de educação básica que é importante ter um espaço dedicado para o LEM, mas principalmente nas instituições formadoras de professores, pois é neste local que é lançada a semente que forma um professor crítico, desafiador e criativo, que seja um profissional que compreenda o LEM como um espaço revolucionário no que se refere as práticas de ensino de matemática.

Por isso é imprescindível que a formação do professor trate bem deste tema, pois o não conhecimento sobre este ambiente/espaço e principalmente a falta de conhecimento sobre a utilização de materiais didáticos, por exemplo, também prejudica docentes que buscam este espaço para atender suas demandas pedagógicas. Lorenzato (1991) já destacava que existem muitos mitos e preconceitos quando se trata de materiais didáticos, e principalmente os relacionados a matemática, dentre os quais, de que esses materiais custam caro, que existem poucos, que dificultam a abstração entre outros.

O LEM pode oferecer diversas alternativas para auxiliar o professor no que se refere ao ensino-aprendizagem da matemática, instigando-o a utilizar uma gama de materiais didáticos, que por sua diversidade possibilita, ajudar os educandos nas suas diferentes formas de aprender.

Os materiais didáticos são como o coração dos laboratórios de ensino de matemática auxiliando os educandos a desenvolverem suas próprias habilidades, fazendo uma leitura do seu cotidiano, construindo uma forma de pensar autônoma, a qual é extremamente necessária durante toda sua trajetória escolar para sua aprendizagem em matemática.

O Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) pode ser um espaço importante, que possibilite ao estudante um ambiente mais agradável, perfeito para a reflexão, a curiosidade, e propício para o desenvolvimento de sua aprendizagem. Pode-se destacar duas dimensões para o Laboratório de Ensino de Matemática, uma para a escola de educação básica e outro para as instituições de formação de professores e, em ambas, a implantação é de extrema relevância para a construção de um ensino de matemática mais eficaz e efetivo.

Laboratório de Ensino de Matemática na Escola Básica: impactos na aprendizagem do aluno

Nos dias atuais o ensino da Matemática exige do professor o uso de metodologias e atividades diferenciadas para que o aluno se envolva, crie expectativas e se aproprie desenvolvendo seus conhecimentos matemáticos.

A criação de espaços dentro das escolas básicas para fomentar o aprendizado de matemática é fundamental, cabendo destacar que não se trata apenas de salas ambientes, o que apresenta entraves como: o número de salas ambientes de matemática, conforme o número de professores e a organização do horário das aulas, a demora no deslocamento dos alunos e a divergência entre os professores no que diz respeito aos equipamentos necessários.

A nossa reflexão é sobre a possível implementação dos Laboratórios de Ensino de Matemática como um espaço de aprendizagem que se reflita na aprendizagem dos alunos da Educação Básica. Observando que antes de se preocupar com a estrutura física deve-se atentar para o envolvimento dos professores, que devem discutir e estudar sobre as diferente concepções de educação, ensino e aprendizagem de matemática que são compartilhadas em cada unidade escolar.

Nesse sentido Zaidam (2018) enfatiza que o LEM contribui para a formação de professores, pois a utilização desse espaço requer um planejamento diversificado, a busca de novas metodologias e o desafio de aprender a utilizar materiais concretos nas aulas de matemática.

Logicamente que há muito para avançar no ensino básico de modo que os professores possam se envolver mais em projetos, pesquisas e ações que superem a zona de conforto das aulas tradicionais de matemática. Entre os empecilhos podemos ressaltar a extensa carga horária-aula dos professores, o que pode impedir que muitos se dediquem a projetos e a cursos/atividades de formação continuada.

Nessa perspectiva Fuchs (2018) lembra que não basta ter o "espaço físico", é preciso que os professores estejam em constante formação para diversificarem sua ação docente, pois o ambiente e o modo como o professor conduz a sua aula são essenciais no desenvolvimento lógico matemático.

Dessa forma é importante que os professores de matemática articulem com os seus colegas de área e gestores um espaço na escola que propicie o desenvolvimento das aulas de matemática, viabilizando o uso de materiais concretos/didáticos, metodologias e tecnologias, sendo um elo entre teoria e prática, possibilitando ao aluno a construção/assimilação do conhecimento.

Cada escola, de acordo com as suas possibilidades, adota um formato diferente para que o LEM seja uma extensão da sala de aula, contudo ele não deve se sobrepor a outros espaços da escola. Geralmente as escolas não dispõe de um espaço exclusivo para a organização do LEM, mas é possível criar alternativas, como por exemplo usar algum armário da biblioteca da escola para que os professores possam armazenar os materiais, jogos, e ter a opção de usar a biblioteca para levar os alunos e desenvolver aulas nas quais seja necessário a manipulação de materiais como: o metro, esquadro, sólidos geométricos, material dourado, discos de frações, tangram, torre de hanói entre outros.

Outra opção é dividir com o laboratório de Química, Física e Biologia um espaço para o LEM, de modo que os professores possam organizar uma proposta e um espaço que oportunize o desenvolvimento de um trabalho integrado e interdisciplinar.

Segundo Lorenzato (2010), o uso do LEM facilita a aprendizagem do aluno e otimiza o tempo do professor para ensinar. Isso porque os alunos, gostam que as aulas sejam ministradas em espaços diferentes da sala de aula tradicional que despertem neles o interesse em saber usar um jogo, aguça a vontade de participar da aula ao construir um material e desperta a curiosidade em alguns porquês da matemática.

A importância do Laboratório de Ensino de Matemática na formação docente

Um dos principais marcos na formação de professores são os estágios supervisionados, que podem ser observados como um espaço de aprendizado e transição, onde os licenciandos irão aplicar o conhecimento adquirido durante sua trajetória acadêmica, bem como a aquisição de novos conhecimentos oriundos da prática de estágio.

Contudo, segundo Oliveira e Kikuchi (2018), muitas vezes o planejamento e a prática não se alinham. Sob esta ótica, o Laboratório de Ensino de Matemática apresenta sua importância na formação de professores, auxiliando os licenciandos na experimentação de diversas metodologias de ensino, materiais didáticos e recursos para o ensino de matemática.

Segundo Silva e Silva (2004), as práticas laboratoriais tendem a oportunizar um melhor aprendizado dos conceitos vistos em sala de aula, uma vez que o Laboratório de Ensino de Matemática pode ser definido como “ambiente de recursos pedagógicos que permite aos professores elaborar e estruturar procedimentos metodológicos úteis, capazes de tornar a prática docente eficaz na compreensão dos princípios básicos matemáticos, que envolvem o ensino-aprendizagem" (SILVA; SILVA, 2004, p.02).

Dessa forma, este ambiente deve auxiliar os professores em formação na criação, aplicação, testes e avaliação de novas metodologias de ensino. Disto, podemos evidenciar o Laboratório de Ensino de Matemática como um espaço de criação e reflexão, de suma importância para os licenciandos buscarem suas identidades como professores. Segundo Bittar e Freitas (2005), a concepção de Laboratório de Ensino de Matemática deve ir além de um espaço para a exposição de materiais didáticos. Para os autores, deve ser um espaço dinâmico que busque favorecer o intercâmbio de ideias e práticas pedagógicas referentes ao ensino de matemática. Para tal, é fundamental o envolvimento de professores e alunos nas atividades experimentais que são desenvolvidas.

Nesta perspectiva, a troca de saberes entre discentes com seus pares, e entre os discentes e professores, é de grande importância, uma vez que é através da interação e da troca de saberes que gradativamente os estudantes consolidam suas convicções e opções teórico metodológicas. Segundo Josso (2004), os processos de formação se consolidam, do ponto de vista do aprendente, a partir de interações.

Junto a estas interações e troca de saberes, espera-se que o Laboratório de Ensino de Matemática leve os discentes a pensarem por eles mesmos, questionando, observando padrões e desenvolvendo uma atitude de investigação frente a matemática. (2009, p. 90-91 *apud*. OLIVEIRA; KIKUCHI, 2018).

Segundo Lorenzato, o Laboratório de Ensino de Matemática de caracterizar-se como "... um espaço para facilitar tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender" (LORENZATO, 2009, p. 7).

A experimentação e a troca de ideias e saberes viabilizados no espaço do LEM tendem a fomentar o senso crítico e a capacidade criativa dos professores em formação, e acredita-se que esta seja uma das maiores contribuições do Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Contudo, isto não é uma tarefa simples, sendo fundamental que se fomente a liberdade para o diálogo, interação, troca de ideias, críticas construtivas e abertura para a experimentação.

Referências

BEZERRA, Manoel Jairo. **O material didático no ensino de matemática**. Rio de Janeiro, MEC/ Caderno CEDES, 1962.

BITTAR, M; FREITAS, J. L. M. **Laboratórios de educação matemática**. Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental. Campo Grande: Editora UFMS, 2005. p. 231-265.

FUCHS, M.J.; Abitante, L.G.; MAROSTEGA, J.S.; WEBWE, E. Implementação do Laboratório de Ensino de Matemática em escolas de Educação Básica: repensando o processo de ensino e aprendizagem. **Revista Insignare Scientia**. Vol.1, n.2, mai/ago. 2018. Disponível em: https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/RIS/article/view/7797/5647 . Acesso em: 10 maio. 2021.

GONÇALVES, A. R..; SILVA, A. L. **O Uso do Laborató-**

rio no Ensino de Matemática. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_antonio_roberto_goncalves.pdf. Acesso em: 09 maio. 2021.

JOSSO, M-C. **Experiências de vida e formação. São Paulo: Cortez, 2004.**

LORENZATO, S.. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

MOREIRA, Marco A. **Teorias de aprendizagem**. 2. ed. São Paulo: E.P.U., 2017.

OLIVEIRA, Z. V. KIKUCHI, L. M. **O laboratório de matemática como espaço de formação de professores**. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-15742018000300802>. Acesso em: 10 de maio

RODRIGUES, P. F. C. ABREU, L. A. de F. AMBROSIO, R. de J. **A importância da utilização do Laboratório de Matemática como Facilitador da aprendizagem: Uma Proposta no IFF – Campos Centro**. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5545_3435_ID.pdf>. Acesso em: 05 de maio de 2021.

SILVA, R. C. da. SILVA, J. R. da. **O papel do Laboratório no Ensino de Matemática**. 2004 Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/RE75541815487.pdf>. Acesso em: 05 de maio de 2021

SOLDATELLI, A. Um laboratório para o ensino de matemática. **Scientia cum industria**. Vol. 4, n. 4, 223-227. 2016. Disponível em: http://www.ucs.br/etc/revistas/index.php/scientiacumindustria/article/view/4908/pdf. Acesso em: 10 maio. 2021.

ZAIDAM, S.; OLIVEIRA, R.R.M. Um laboratório de matemática na escola. **Revista Brasileira de Educação Básica**. Vol. 3, n. 7, jan/mar. 2018. Disponível em: http://pensaraeducacao.com.br/rbeducacaobasica/wp-content/uploads/sites/5/2019/09/04-Renata_UM-LABORAT%C3%93RIO-DE-MATEM%C3%81TICA-NA-ESCOLA.pdf. Acesso em: 10 maio. 2021

A Zona de Desenvolvimento Proximal Profissional Docente e a emergência da práxis em licenciandos de Matemática nas disciplinas de Laboratório

Rafaela Fetzner Drey
Ednei Luís Becher
Anna Tereza Rempel Chollet
Fabiana G. Leindeker da Silva

Este capítulo apresenta, através de uma análise prática e reflexões teóricas, como o conceito de "ZPTD" (WARFORD, 2011) – ou "zona de desenvolvimento proximal profissional docente", advindo da ideia de ZDP de Vygotsky (1991), pode subsidiar o planejamento e as práticas de ensino dos cursos de licenciatura em geral e daqueles de Matemática em particular, contribuindo para a organização, a concepção das atividades de formação docente e para a avaliação das tarefas e atividades desenvolvidas pelos estudantes. A versatilidade do construto permite que ele seja empregado associado a Engenharia Didática (MACHADO, 2002), *a Lessons Study* (CURI, 2021) ou outra metodologia de trabalho que possa ser empregada na formação de professores. Particularmente, a Zona de Desenvolvimento Proximal Profissional Docente pode constituir-se em um guia que oriente o trabalho desenvolvido nas disciplinas de laboratório, as quais visam desencadear o processo formal e acadêmico de constituição da profissionalidade dos docentes em formação.

O desenvolvimento profissional docente: como um licenciando se torna professor?

Se considerarmos os principais documentos prescritores que orientam a concepção dos cursos de formação inicial docente no Brasil, uma questão é unânime: a importância do alinhamento entre conteúdos teóricos e práticos de Ensino é decisiva na construção de um bom profissional da educação. A própria Lei de Diretrizes e Bases - LDB (BRASIL, 1994) e o Conselho Nacional de Educação (CNE) apontam a necessidade de se realizar a articulação entre o conhecimento técnico e a prática em sala de aula. A Resolução CNE/CP nº 2, de 19 de fevereiro de 2002, já estabelecia entre as orientações principais para fundamentação dos cursos de formação de professores, deliberou a obrigatoriedade de 800 horas práticas ao longo dos cursos de licenciaturas (divididas em, no mínimo, 400 horas de estágios e 400 horas de prática, distribuídas em diferentes componentes curriculares desde o início do curso). Isso se constitui como uma "virada de perspectiva" na concepção dos cursos de licenciatura, nos quais a prática perpassa todo o curso, não se apresentando apenas no momento do estágio supervisionado. Contudo, é nesse momento que os licenciandos ainda parecem apresentar as maiores dificuldades em associar, relacionar e acessar os conteúdos teóricos: no momento de desenvolvimento de suas práticas de ensino. Aqui, visamos analisar de forma mais específica como a profissionalidade docente "emerge" ao longo das práticas no curso de Licenciatura em Matemática.

O epistemólogo Jean-Paul Bronckart (2004, p.87), dentro da teoria do interacionismo sociodiscursivo (ISD) – que se constitui como um projeto de ciência do humano que visa dar continuidade ao quadro do interacionismo social de Vygotsky – conceitua "trabalho" como uma forma de agir, uma prática comum à espécie humana. No caso do trabalho docente, o professor é bem-sucedido em seu ofício quando domina a gestão de uma aula e de seu percurso, considerando as expectativas e os objetivos definidos previamente pela instituição escolar em função das características e reações dos alunos (BRONCKART, 2006, p. 207). A definição da profissionalidade do professor, de acordo com esse estudioso, não se concentra apenas no domínio que aquele apresenta do programa e dos conteúdos que devem ser ensinados, tampouco se resume no conhecimento das reais capacidades e limitações cognitivas dos alunos; mas, principalmente, "(...) na capacidade de conduzir seu projeto didático, considerando múltiplos aspectos (sociológicos, materiais, afetivos, disciplinares, etc.), frequentemente subestimados e que, entretanto, constituem o 'real' mais concreto da vida de uma classe" (BRONCKART, 2006, p. 227).

Outro pesquisador que traz importantes contribuições na tessitura complexa da formação de um professor é o pesquisador canadense Maurice Tardif. O estudioso propõe uma perspectiva de reflexão acerca da formação docente fundamentada nos diversos saberes que formam o conhecimento de um profissional do ensino.

Tardif (2002, p.36) afirma que o saber de um professor está relacionado com sua identidade, experiências e histórias pessoais e profissionais. É um saber social, partilhado por um grupo de agentes (os outros professores). Segundo o mesmo autor (op.cit.), a prática dos docentes é composta por diferentes saberes: (1) os saberes da formação profissional (das ciências da educação e da pedagogia); (2) os saberes disciplinares; (3) os saberes curriculares; (4) os saberes experienciais e (5) os saberes pessoais. O autor sublinha, no entanto, que, na dificuldade de articular os três primeiros saberes, os professores, em geral, tentam produzir e colocar em uso novos saberes que possam compreender e aprimorar em sua prática, aos quais chama de saberes práticos. Esses saberes são, conforme Tardif (2000) um conjunto de saberes constantemente atualizados e desenvolvidos pelos docentes no exercício da docência e não estão sistematizados, pois são saberes relacionados a prática.

Os saberes advindos das experiências docentes são originários das práticas cotidianas dos professores, nascidos no confronto entre as experiências originárias de um coletivo de trabalho e as experiências pessoais de cada professor. Os saberes da experiência surgem, portanto, *da* e *na* interação.

Tardif e Lessard (2009, p. 8) concebem o trabalho docente como um trabalho interativo, pois é uma atividade profissional sobre e com outrem. É uma atividade na qual o trabalhador se dedica a um “objeto” de trabalho que é, na verdade, outro ser humano. Desse modo, o profissional docente não “manipula” seu objeto de trabalho, mas *interage* com este. Assim, o "objeto" do trabalho docente é, de fato, (co)construído numa interação entre professores e alunos em situações de ensino/aprendizagem. Nesse sentido, o início da carreira docente, conforme Tardif (2002, p. 86), é o momento de maior importância do saber experiencial, pois é quando os futuros professores precisam "colocar à prova" os saberes da formação profissional inicial, e acabam se deparando com situações difíceis nas tarefas diárias do fazer docente. Assim, percebem que muito da profissão será aprendido na prática, pelas experiências, pela constante descoberta do próprio trabalho. É nesse aspecto que a profissão docente se estabelece, de fato, como um trabalho interativo, como denominam Tardif e Lessard (2009). Além disso, estudos como os de Carnin (2011) apontam que o saber experiencial também pode ser influenciado pelas experiências sofridas pelo docente enquanto aluno. Isso significa que há muito da maneira como o professor aprendeu imbuído em sua experiência e em seu modo de fazer profissional. Os chamados saberes pessoais, adquiridos durante o que Tardif (2002) denomina "trajetória pré-profissional", têm um peso muito importante na compreensão dos saberes mobilizados e utilizados pelos profissionais no exercício do magistério. Sem dúvida, as interações com professores orientadores e supervisores das atividades práticas docentes (seja nas disciplinas de Laboratório ou de Estágio Supervisionado), além das trocas entre colegas de licenciatura, têm um impacto notório na construção da profissionalidade dos licenciandos, no "tornar-se professor" que está em (co)construção ao longo da formação inicial.

Vygotsky e o desenvolvimento humano: a noção de ZDP

Lev Vygotsky (1896-1934) foi o primeiro psicólogo moderno a se dedicar mais especificamente ao estudo da aprendizagem e desenvolvimento dos aspectos particularmente humanos. Elaborou hipóteses de como as características humanas se formam ao longo da história, e seus estudos o guiaram para uma área que, segundo ele, era mais ampla que a psicologia: a chamada "pedologia" (ciência que integra os aspectos biológicos, psicológicos e antropológicos do desenvolvimento humano desde as nossas primeiras relações com o social).

Sua teoria sócio-interacionista se caracteriza por tentar compreender a relação entre os seres humanos e o seu ambiente físico e social, já que considera o homem inserido na sociedade; busca também identificar as novas formas de atividade que fizeram com que o trabalho fosse o meio de relacionamento entre o homem e natureza, examinar as consequências psicológicas dessa atividade, e ainda, analisar o uso de instrumentos e o desenvolvimento da linguagem. É necessário ressaltar que, para Vygotsky, o desenvolvimento humano não é uma decorrência de fatores isolados que amadurecem, ou fatores ambientais que controlam o comportamento, mas sim trocas recíprocas durante toda uma vida, entre o indivíduo e o meio, um sobre o outro. Essas trocas são realizadas de forma dialética, caracterizadas pela constância e irregularidade no desenvolvimento, ligadas nos fatores externos e internos; por isso, Vygotsky (2017) se nega a utilizar a perspectiva de que o desenvolvimento é um processo linear.

Segundo o psicólogo (VYGOTSKY, 1991), o sujeito é interativo e através das relações intra e interpessoais e de troca com o meio, surge o processo denominado mediação, que ocorre principalmente com a utilização do principal instrumento inventado pela humanidade, a linguagem. Ela é desenvolvida e emprega o papel de organizar os signos em estruturas complexas e consequentemente desenvolver os processos psicológicos, o que resulta num indivíduo que assimila, transmite e preserva as informações do meio em que está inserido.

Apesar de ter vivido muito brevemente, falecendo antes mesmo de completar 38 anos devido à tuberculose, produziu inúmeros estudos científicos sobre diferentes temas que causaram controvérsias e discussões na área da psicologia contemporânea e das ciências humanas de um modo geral. Um de seus maiores destaques foi o do conceito da ZDP (Zona de Desenvolvimento Proximal) que melhor especifica a inter-relação instrução/desenvolvimento e a importância das conquistas de todo o amadurecimento humano para a constituição do homem (VYGOTSKY, 1991). Ele entende que o desenvolvimento humano possui dois níveis: o primeiro é o nível de desenvolvimento real (ZDR), que compreende o conjunto de atividade que o ser humano consegue resolver sozinho. Esse nível indica os ciclos de desenvolvimento já completos, isto é, se refere às funções psicológicas que o indivíduo já construiu até determinado momento. O segundo nível é o de desenvolvimento potencial: conjunto de atividades que o ser humano não consegue realizar sozinho, mas que, com a ajuda de alguém e/ou instrumentos que lhe deem orientações adequadas (par mais experiente), consegue resolver. Para Vygotsky, o nível de desenvolvimento potencial evidencia muito mais o desenvolvimento em si do que o nível de desenvolvimento real, pois este último refere-se a ciclos de desenvolvimento já completos, sendo um fato que pertence ao passado, enquanto o nível de desenvolvimento potencial indica o desenvolvimento futuro do indivíduo.

O psicólogo se aprofundou entre os níveis citados acima, para analisar a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial, denominando este meio como Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP):

> A Zona de Desenvolvimento Proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão, presentemente, em estado embrionário (VYGOTSKY, 1984, p. 97).

A descoberta de um segundo nível de desenvolvimento e, por consequência, a suposição de uma Zona de Desenvolvimento Proximal, foi resultante da percepção de diferenças ao nível de solução de problemas entre os indivíduos que, aparentemente, apresentavam os mesmos níveis de desenvolvimento real. Aplicando testes de inteligência em crianças, Vygotsky constatou uma similaridade ao nível do quociente intelectual, ou seja, ambas conseguiam resolver sozinhas os mesmos problemas, mas, ao interagir com essas crianças propondo exercícios mais complexos, que iam além das suas capacidades de resolução independente, percebeu que apenas uma delas teve sucesso na resolução, com ajuda, solucionando problemas que indicavam uma idade mental superior, e a outra que, sob as mesmas orientações, não conseguiu solucionar os problemas. Concluiu, então, que apesar da aparente semelhança dessas crianças quanto ao nível de desenvolvimento afetivamente alcançado, elas, na verdade, se diferem quanto às futuras aprendizagens e desenvolvimento. Com isso, Vygotsky denominou essa diferença entre o que o ser humano resolve independentemente e o que consegue solucionar com a ajuda de um par mais experiente, como sendo a Zona de Desenvolvimento Proximal.

A "ZPTD"- Zona de Desenvolvimento Proximal Profissional Docente

Devido ao curto tempo de vida de Vygotsky, seus estudos científicos produzidos e deixados com seus contribuintes serviram de base para que muitos outros pesquisadores buscassem mais conhecimento e descobertas sobre a ZDP e a aprendizagem Vygotskiana.

Mark K. Warford foi um desses estudiosos que buscou saber mais sobre os níveis de desenvolvimento humano, expandindo os conceitos da Zona de Desenvolvimento Proximal, ao constatar que durante a formação inicial de professores, os licenciandos obtinham apenas o ensino direto de conceitos, o que levava a repetição de ações e simulação de conhecimento dos que foram transferidos de seus professores para a prática de sala de aula posterior a sua formação. As experiências vividas anteriormente pelos alunos de licenciatura não tinham espaço para exposição e discussão durante o curso, resultando em um distanciamento entre a academia (teoria) e o campo (prática).

Com isso, Warford (2011) expandiu a ZDP para algo mais dinâmico e que se encaixa de forma adequada nas etapas da formação docente, utilizando o termo "ZPTD" - *Zone of Proximal Teacher Development*, que traduzimos por "Zona de Desenvolvimento Proximal Profissional Docente". A chamada ZPTD é composta por quatro níveis, sendo eles:

I. Autoassistência
II. Assistência de par mais experiente
III. Internalização
IV. Retorno

O primeiro nível é chamado de *Autoassistência*, pois neste momento o aluno de graduação expõe seus conhecimentos e compartilha experiências anteriores que resultaram na escolha da docência como profissão, através da escrita de autobiografias de aprendizagem e discussões em sala de aula. Nessa "etapa" o licenciando oferece diagnóstico de direções que podem ser beneficiadas com a mediação do professor-educador, além de tecer relações entre seu conhecimento prévio e o especializado/experimental, demonstrando seus desejos, objetivos, intenções e necessidades. Se o professor (mediador) notar que a qualidade de motivação e envolvimento do aluno de licenciatura é maior, então ele o considera apto para o segundo nível da ZPTD, denominado *Assistência de par mais experiente*.

Neste segundo momento, o par mais experiente, sendo ele um aluno de graduação com mais experiência em práticas de sala de aula ou o próprio professor da disciplina do curso, conecta o licenciando à profissão, utilizando teorias de pesquisadores que abordam o ensino e a aprendizagem, auxiliando a tecer relações entre a bagagem que o aluno já tem e que foram expostas anteriormente, com as futuras aprendizagens que irão ser obtidas na prática. O par mais experiente expõe situações de sala de aula, análises de práticas docentes e faz uma relação entre as teorias que foram discutidas no nível anterior com as práticas observadas nesse momento, sendo essa uma poderosa ferramenta para o desenvolvimento do licenciando. É preciso destacar que os dois primeiros níveis podem ocorrer de forma invertida e/ou simultaneamente.

O terceiro nível, *Internalização*, foca na incorporação e na relação dos conceitos pedagógicos que os alunos de licenciatura aprenderam com a capacidade de usá-los na prática em sala de aula, no planejamento de atividades práticas e produção de narrativas no momento de interagir com a turma. O licenciando conta com a presença do professor formador e ou com professor regente da turma, tanto para auxiliar no planejamento das atividades quanto na execução das mesmas.

Por fim, temos o *Retorno*, sendo este o último nível. Nele, a prática reflexiva é a parte mais relevante do processo, pois através disso a resolução de problemas, reconstrução de significado e subsequentes julgamentos reflexivos ocorrem, fazendo com que o licenciando reflita sobre a experiência em sala de aula, acomode novas informações, (re)organize os ganhos e experiências, exemplifique seus objetivos alcançados ou não, demonstre suas intenções, capacidades e incapacidades. Também nesse espaço podem ser sugeridas alternativas que solucionem as próprias dificuldades, podendo utilizá-las em vantagem nas suas próximas práticas. Além disso, é nessa etapa que observamos se o aluno de licenciatura se enxerga/posiciona como o professor da turma, tomando responsabilidade pelas ações realizadas em sala, se identificando como o *designer* das atividades, se analisa o próprio comportamento perante a turma, qualifica o planejamento, entre outras observações a serem feitas perante a prática, conforme resultados de um projeto de pesquisa[1] realiza-

[1] O projeto intitulado "O Impacto das práticas de ensino na construção da profissionalidade de futuros professores: o estágio em foco" ocorreu no período entre 01/09/2020 e 31/03/2021, e teve como objetivo principal observar o impacto das práticas de ensino durante o curso de licenciatura no momento do estágio, visando compreender como se desenvolve a

do em 2020.

Para exemplificar os níveis da ZPTD (WARFORD, 2011) descritos anteriormente, trazemos as análises do projeto supracitado realizadas nos relatórios de estágio de licenciandos que realizaram o Estágio Supervisionado III do curso de Licenciatura em Matemática no ano de 2019. A primeira parte do recorte de análise é composta pelo relato de observação dos estagiários sobre as atividades exercidas pelo(a) professor(a) regente da turma durante um curto período de tempo.

Nesse momento, os licenciandos ainda não haviam realizado a prática, apenas observaram "de fora" e relataram de forma imparcial sobre o que visualizaram. A maioria não tomou responsabilidade enunciativa ao relatar os fatos, o que pode se justificar como uma característica do gênero textual "relato de observação". Apesar desse fato, os participantes utilizaram recursos linguísticos que indicam uma reflexão sobre a articulação da teoria com a prática, sendo isso um indício de que internalizaram as teorias vistas no curso de formação docente e conseguiram observar tais características numa prática docente, mesmo não sendo eles os indivíduos que realizaram a ação. Nesta análise, é possível observar os níveis I, II e III da ZPTD, pois o nível I, como dito anteriormente, requer uma exposição dos conhecimentos e compartilhamento de experiências, características que foram notadas nas análises quando os licenciandos descrevem os conhecimentos que observaram durante o curso e experiências adquiridas anteriormente no relato. Os aspectos presentes no relatório que se adequam ao nível II foram notados quando os estudantes da graduação tecem relações com

profissionalidade (ou não) de um aluno de licenciatura durante a prática docente de estágio na Licenciatura em Letras e na Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior do Litoral Norte do RS.

o que o professor relatou em sala de aula, demonstrando que (co)construíram o planejamento de atividades, além de conseguir realizá-las de forma mais adequada quando foram para a sala de aula (nível III), pois contaram com a experiência e conhecimento do par mais experiente nesse momento precedente à prática e teceram relações entre a teoria e a prática observada.

Já na segunda parte das análises, o gênero utilizado para observarmos a existência ou não dos níveis da ZPTD foi a "autoavaliação" feita pelo(a) estagiário(a) logo após ter realizado a prática do estágio. Foi possível notar em vários momentos a presença do professor regente da turma, ou do professor orientador do estágio, como uma forma de "par mais experiente" no auxílio tanto do planejamento das atividades quanto na realização das mesmas durante a prática, o que se alinha ao que Warford (2011) denomina como o Nível II da ZPTD. Além disso, a atividade reflexiva perante a ação está presente na maioria dos relatórios, pois os licenciandos demonstraram, mesmo que de forma sutil, um posicionamento discursivo ao descreverem suas ações em sala de aula. Assim como no relato de observação, os conteúdos temáticos se fazem presentes, mas na autoavaliação estão descritos de forma mais reflexiva e os modalizadores sugerem intenções, capacidades e incapacidades. Nesse momento, observamos que alguns dos licenciandos estão no nível IV da Zona de Desenvolvimento Profissional Docente, pois realizam esta manobra de gerenciamento entre o coletivo e o individual durante a realização das ações em sala de aula, conforme se observa em seu posicionamento discursivo na análise textual-discursiva (BRONCKART e MACHADO, 2009).

O Laboratório de Matemática como disciplina na formação inicial

Nos cursos de licenciatura em Matemática coabitam professores de três linhas de formação diferentes: na primeira estão os professores com formação voltada para a pesquisa matemática, ou no campo da Matemática Pura ou naquele da Matemática Aplicada; na segunda estão os professores com uma formação no campo da Educação enquanto na terceira temos os professores com formação em Ensino, os quais possuem uma formação que tenta transitar entre as duas primeiras mas que, contudo, possui suas próprias especificidades e que, ao longo do tempo, também tem desenvolvido um referencial teórico próprio.

Em muitas instituições de ensino superior os docentes são organizados em departamentos e, embora muitos dos docentes do departamento de Educação/Ensino possuam formação em Licenciatura em Matemática as diferenças entre as concepções de ensino do matemático e as do educador matemático para o ensino e a aprendizagem interferem diretamente na qualidade e no tipo da formação do futuro professor.

É neste espaço que as disciplinas de prática denominadas Laboratório de Matemática ou Laboratório de Ensino de Matemática ou Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática se inserem. Elas buscam exatamente articular e contextualizar para e com os estudantes como as diferentes formas de conceber a Matemática e os processos de ensino e aprendizagem interferem e se manifestam na prática docente da sala de aula da Educação Básica. Naturalmente que estas disciplinas não respondem sozinhas pela evolução profissional do professor em formação mas pela posição que ocupam na grade curricular, em geral, no meio do curso, acabam desempenhando um papel estratégico e crítico no processo inicial de constituição da profissionalidade dos estudantes de licenciatura em Matemática.

Por isso, nos cursos de Licenciatura em Matemática, estas disciplinas ocupam um lugar importante, tendo em vista que se situam na interseção entre as disciplinas didático-pedagógicas e as de conteúdo específico da Matemática. São nestas disciplinas que o estudante terá oportunidade de relacionar as teorias da Matemática e as da Educação/Ensino para refletir sobre as práticas de sala de aula e sobre suas próprias concepções sobre Matemática e sobre como ensiná-la.

Cabe mencionar que neste contexto a ampliação e a visibilidade que a área de Educação Matemática ganhou no Brasil, ao longo das décadas recentes, têm contribuído muito para oportunizar uma formação mais ampla para os professores do ensino superior, oportunizando desta forma que as disciplinas de Prática de Ensino não limitem-se a perpetuar práticas pedagógicas antiquadas e constituam-se em espaços de pesquisa e desenvolvimento de inovações metodológicas (VALENTE, 2014).

Um aspecto peculiar da prática docente reside no fato de que aquilo que é planejado pelo professor nem sempre acontece da forma como foi concebido. Isso acontece porque a sala de aula é um espaço dinâmico no qual a interação entre os estudantes e entre estes e o professor altera a cada momento a percepção e a compreensão daquilo que está sendo o tema da aula. Contudo, não é possível pensar na prática docente dissociada de um planejamento prévio que abarque pelo menos os objetivos, a metodologia, o conteúdo e os procedimentos avaliativos que serão empregados no decorrer de uma aula (LORENZATO, 2009).

Logo, durante a formação inicial do professor de Matemática é essencial, entre tantas outras coisas, que disciplinas e espaços destinados a criação de tarefas, desenvolvimento de atividades, produção de materiais, debates e trocas entre os estudantes e com os professores formadores estejam presentes, articulando a formação inicial dos docentes a partir das diferentes perspectivas teóricas presentes no campo da Educação Matemática, contribuindo para a formação de um professor de Matemática com sólido conhecimento matemático, metodológico e teórico, que seja capaz de inserir e integrar as diferentes tendências de ensino de Matemática na sua prática profissional.

Em particular as práticas simuladas que habitualmente têm lugar nas disciplinas de Laboratório são um momento e um espaço na formação inicial no qual o futuro professor pode planejar, elaborar, propor, praticar e avaliar seus materiais, suas sequências didáticas, sua postura e até mesmo suas crenças sobre como ensinar Matemática e como ser professor de Matemática e, mais do que isso, nestas disciplinas os professores em formação têm a possibilidade de errarem e discutirem sobre estes erros com seus colegas e professores, para os compreenderem e buscarem formas eficazes e inovadoras de corrigi-los.

As disciplinas de Laboratório também são importantes na formação do futuro professor de Matemática pois são um espaço no qual os licenciandos podem experimentar o aprendizado de outras formas, diferentes daquela que vivenciaram durante os seus anos de escola básica, os quais têm grande influência sobre a forma como se portarão como professores (TARDIF, 2012; SHULMAN, 2014). Isso é essencial para que os futuros docentes estejam abertos a inovações pedagógicas, pois é muito difícil que um estudante que nunca fez uma modelagem matemática ou que tenha realmente usado a metodologia Resolução de Problemas durante sua vida escolar o faça quando for professor sem ter experimentado em algum momento este tipo de aprendizado.

Aprender a planejar os processos de ensino de Matemática, percebendo-os como algo dinâmico, levando em conta que o ato de ensinar precisa constantemente ser avaliado e adequado as novas situações que surgem no contexto da sala de aula é um processo dialético no qual os estudantes de graduação começam a fazer os primeiros ensaios nestas disciplinas e, além disso, são instigados a refletirem sobre o ato de planejar o ensino como uma atividade prática semelhante àquela realizada por um engenheiro (MACHADO, 2002), a qual se aprende durante a formação inicial mas que é aprimorado continuamente durante o exercício profissional.

Outro aspecto de difícil tratamento nas disciplinas de prática como as de Laboratório de Matemática é a avaliação. Isso porque em nosso sistema educacional a avaliação ainda não é assumida e percebida pelos professores e pelos estudantes como parte do processo de ensino e aprendizagem e, mais do que isso, que ela permeia todo o processo. Tanto no âmbito da avaliação de sala da aula que busca auxiliar o estudante no seu processo mais imediato de aprendizagem quanto no âmbito do processo de aprendizagem longitudinal que o estudante experimentou durante o período de escolarização. Em suma, diante de um quadro no qual a avaliação ainda é concebida como uma etapa dissociada no ato de ensinar, como avaliar se o estudante além de ampliar seu leque de opções metodológicas e instrumentais para o ensino está conseguindo constituir-se como professor de Matemática?

Buscando elementos que possam contribuir neste processo é que o conceito de ZPTD surge como um instrumento importante para a autoavaliação dos estudantes e também para a avaliação do professor ao longo da disciplina, fornecendo indicativos em relação as capacidades que os estudantes já desenvolveram, aquela que estão em processo e aquelas que ainda precisam ser desenvolvidas para a completa formação docente naqueles aspectos considerados pelo docente formador no âmbito da disciplina que está sendo desenvolvida.

Neste sentido é sempre oportuno enfatizar que qualquer avaliação consiste de um recorte que apresenta um diagnóstico transitório das condições da pessoa sob avaliação e que o resultado da avaliação será potencialmente mais significativo se o avaliador e o avaliado tiverem parâmetros que permitam identificar o caminho já percorrido no processo de aprendizado e o caminho a ser percorrido nas próximas etapas da formação.

Desta forma a avaliação deve ser percebida pelo estudante como uma bússola que lhe indica o que ele ainda precisa aprender e quais habilidade precisa desenvolver, ou seja, a avaliação constitui-se para o estudante em uma fonte de informações que podem contribuir para a consolidação da sua formação como docente e, por outra lado, para o docente formador a avaliação fornece indícios e subsídios que podem e devem orientar o seu planejamento e as situações/atividades/tarefas que serão propostas para os graduandos com a finalidade de completar/integralizar a sua formação.

Referências

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação: Lei 9394/96 – 24 de dez. 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: 1996.

BRONCKART, J.P. Posfácio. IN: MACHADO, A.R. **Linguagem e Educação: o trabalho do professor em uma nova perspectiva** / A.R. Machado e colabs. Campinas: Mercado de Letras, 2009.

__________. **Atividade de linguagem, discurso e desenvolvimento humano**. Campinas: Mercado de Letras, 2006.

BRONCKART, J.P. et *alli*. Agir et discours en situation de travail. **Les Cahiers de La Section des Sciences de L'Education. 103**. Université de Geneve, Juin 2004.

CARNIN, A. **Entre a formação inicial de professores de Língua Portuguesa e o trabalho real: a (co)construção do objeto de ensino produção textual escrita**. Dissertação de Mestrado em Linguística Aplicada. UNISINOS: São Leopoldo, 2011.

CURI, E. Lesson Study: Contribuições para a Formação de Professores que Ensinam Matemática. In: **Perspectivas da Educação Matemática.** V. 14, n. 34, 2021. Disponível em: < https://desafioonline.ufms .br/index.php/pedmat/article/view/12509/8962>. Acesso em: abr. 2021.

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos. In: LORENZATO, Sergio. **Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2009. p. 3-37.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In; MACHADO, S. D. A.; et. al. **Educação Matemática: uma introdução**. 2º ed. São Paulo, EDUC: 2002.

REGO, T.C. ***Vygotsky*. Uma perspectiva histórico-cultural da educação**. 18ª ed. Petrópolis: Vozes, 2011.

SHULMAN, S. L. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. **Cadernos Cenpec**. São Paulo. V. 4, n. 2, dez. 2014.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** 13ª Ed. Petrópolis: Vozes, 2012.

TARDIF, M. LESSARD, C. **O ofício de professor**. Petrópolis: Vozes, 2009.

VALENTE, Wagner R. A prática de ensino de matemática e o impacto de um novo campo de pesquisa: a educação matemática. Alexandria: **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 179-196, nov. 2014

VYGOTSKY, L.S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, L.S. LURIA, A.R. LEONTIEV, A.N. **Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem**. São Paulo: Ícone, 2017. 16ª ed.

WARFORD, M.K. **The zone of proximal teacher development**. Teaching and Teacher Education, 27, 2011.p.252-258.

Média e Mediana nos *fast foods*

Jenifer Cassandra da Silva Oliveira
Ednei Luís Becher

A sequência didática proposta nesse capítulo possui três conjuntos de atividades que explorarão dados de uma notícia sobre gasto com comida de *fast food* no mundo (EL PAÍS, 2016) e foi inspirada nas atividades propostas por Oliveira (2021). Entende-se por sequência didática um ou mais conjuntos de atividades que são conectados entre si e que possuem objetivos comuns de aprendizagem, o que está consistente com a definição proposta por Oliveira (2013, p. 39).

A sequência é organizada a partir de três conjuntos de atividades. No primeiro conjunto é proposta a Atividade I, enquanto no segundo conjunto é proposta a Atividade II, e por fim no terceiro conjunto são propostas as Atividade III e Atividade IV.

Para o planejamento da sequência didática, estabeleceu-se que as atividades seriam orientadas pelos seguintes princípios: iriam ser empregados dados reais; as atividades deveriam ser potencialmente significativas aos estudantes; e seriam utilizadas planilhas eletrônicas para organizar, representar e analisar dados (OLIVEIRA, 2021, p. 56).

A metodologia de ensino que a sequência didática se baseia é o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), que é caracterizada pela utilização de forma articulada ao planejamento, de um ou mais recursos tecnológicos no processo de ensino. Além disso, nessa metodologia de ensino os estudantes interagem/utilizam esse(s) recurso(s) ao longo da(s) atividade(s), possibilitando a exploração de conceitos matemáticos e tecnológicos, e proporcionando um maior sentido a aprendizagem Matemática (GROENWALD, 2019, p. 212-213).

As atividades propostas foram concebidas para serem desenvolvidas com estudantes do 9º ano do ensino fundamental e fazem uso de planilhas eletrônicas de cálculo. Sendo a planilha Calc do pacote Libre Office tomada como referência.

A seguir, serão descritos cada conjunto de atividades, sendo que em cada um será apresentado uma descrição geral do conjunto de atividades com os objetivos de aprendizagem, seguida pelos conteúdos que serão abordados, os procedimentos e, por fim, a apresentação das atividades e orientações aos professores.

Sequência Didática

• 1º Conjunto de Atividades

Se propõe nesta primeira parte da sequência didática, a partir da análise de dados, iniciar o estudo dos conceitos estatísticos de medidas de tendência central rotineiramente abordados durante o estudo da Estatística Descritiva no ensino fundamental.

Para tal, serão analisados dados publicados em uma notícia sobre gasto com comida em fast foods no mundo (EL PAÍS, 2016) e ao final da realização deste conjunto de atividades espera-se que os estudantes sejam capazes de:

- Compreender as informações estatísticas presentes em um recorte de uma notícia;
- Julgar qual tipo de questionamento pode ser respondido a partir das informações da notícia;
- Criar e organizar dados em uma planilha eletrônica;
- Compreender e calcular os valores da média simples e da mediana;
- Compreender o que o valor médio e o valor mediano informam sobre um conjunto de dados.

• Conteúdos

- Média aritmética simples; mediana; e representação tabular.

• Procedimentos

No decorrer da sequência didática serão contemplados elementos previstas no ciclo investigativo de Wild e Pfannkuch (1999, p. 226), que são: gerenciamento de dados, interpretação, análises, comunicação escrita das interpretações e comunicação oral. Sendo a atividade dividida em quatro momentos:

• leitura e discussão do trecho de uma notícia;

• análise e discussão de quais questionamentos podem ser respondidos a partir dos dados da notícia;

• solução dos questionamentos propostos com o auxílio de uma planilha eletrônica;

• discussão conceitual e procedimental sobre o cálculo e o significado da média aritmética simples e da mediana.

• **Atividades e orientações ao(a) professor(a)**

As atividades desse conjunto deverão ser desenvolvidas em um ambiente que possua computadores com acesso ao Calc. Sugere-se, caso seja possível, que cada estudante tenha seu próprio computador para realizar as atividades. Orienta-se que o(a) professor(a), inicialmente, distribua aos alunos folhas impressas contendo a Atividade I, que segue abaixo, e as orientações dos apêndices A, B e C. A Atividade I é composta por um trecho da notícia "Brasileiros estão entre os maiores consumidores de 'fast food' do mundo" (EL PAÍS, 2016); uma tabela contendo informações sobre o gasto, por habitante, com *fast food* em onze países; e quatro questionamentos sobre os dados da tabela.

Após distribuir essas folhas, o(a) professor(a) deverá ler junto com os alunos o trecho da notícia, questioná-los se eles possuem o hábito de consumir *fast food* e, em seguida, questioná-los também sobre quais são as perguntas que podem e as que não podem ser respondidas a partir dos dados da tabela fornecida. O primeiro questionamento objetiva que os estudantes reflitam sobre seus próprios hábitos alimentares, enquanto a segunda pergunta visa que os estudantes desenvolvam o pensamento estratégico, que é um tipo de pensamento geral de Wild e Pfannkuch (1999, *apud* OLIVEIRA, 2021, p. 29) e possui o intuito de possibilitar que os estudantes tomem consciência de quais são as limitações e quais são as potencialidades dos dados, ou seja, o que pode e o que não pode ser afirmado/concluído a partir dos dados da tabela.

Após essas discussões iniciais, deverá ser proposto que os estudantes respondam aos quatro questionamentos abaixo (Atividade I). Como nessa etapa da sequência didática os estudantes, a princípio, não deverão saber o que significa valor médio e valor mediano, eles terão como apoio orientações que encontram-se nos apêndices, que indicam como deve-se proceder utilizando a planilha Calc para responder aos questionamentos e realizar as análises propostas.

Quando os estudantes terminarem de responder aos questionamentos propostos na Atividade I, o(a) professor(a) deverá mediar um debate sobre quais informações foram observadas, conclusões obtidas e respostas encontradas. A partir dessas discussões, o(a) professor(a) deverá definir[1] o que significa média simples e mediana, buscando fazer associações com as reflexões realizadas pelos estudantes durante o debate.

Atividade I

> Na América do Sul, ninguém gasta mais em *fast food* do que os brasileiros. Aliás, segundo um estudo realizado pela EAE Business School, que analisa os hábitos de consumo nesse setor em 2014, apenas Estados Unidos (290,2 bilhões de reais), Japão (162,3 bilhões de reais) e China (130,2 bilhões de reais) estão à frente do Brasil (53,7 bilhões de reais) em gastos no setor. (EL PAÍS, 2016)

[1] O(A) professor(a) poderá basear-se nas definições de média simples e mediana propostas em Oliveira (2021, p. 59).

ECONOMIA ASSINE

'FAST FOOD' >

Brasileiros estão entre os maiores consumidores de 'fast food' do mundo

Na América do Sul, ninguém gasta mais em *fast food* do que os brasileiros. Aliás, segundo um estudo realizado pela EAE Business School, que analisa os hábitos de consumo nesse setor em 2014, apenas Estados Unidos (290,2 bilhões de reais), Japão (162,3 bilhões de reais) e China (130,2 bilhões de reais) estão à frente do Brasil (53,7 bilhões de reais) em gastos no setor. (EL PAÍS, 2016)

A notícia informa ainda o levantamento realizado pela EAE Business School estimando o gasto em comida rápida por habitante de cada país no ano de 2014, no qual o Brasil está entre os onze países nos quais as pessoas afirmam que mais gastam com este tipo de alimentação no seu dia a dia. Com base nos dados do trecho da notícia e da tabela abaixo, utilizando a planilha Calc e as orientações dos apêndices A, B e C, responda:

a) Qual o valor **médio** gasto em comida rápida por cada habitante dos países listados na tabela?

b) Você consegue estabelecer alguma relação entre o valor encontrado no **item a**) e os dados da tabela?

c) Qual o valor **mediano** dos gastos em comida rápida por cada habitante dos países listados na tabela?

d) Você consegue estabelecer alguma relação entre o valor encontrado no **item c**) e os dados da tabela?

Tabela com os dados usados nas atividades

GASTO EM COMIDA RÁPIDA POR HABITANTE DE CADA PAÍS NO ANO DE 2014	
PAÍSES	EM EUROS POR HABITANTE
Japão	231,35
EUA	205,37
Austrália	178,06
Canadá	175,64
Reino Unido	97,96
Brasil	59,84
Alemanha	58,37
México	55,83
Espanha	42,61
Itália	28,14
China	26,94

Fonte: Elaboração própria a partir da notícia "Brasileiros estão entre os maiores consumidores de *fast food* do mundo" (EL PAÍS, 2016).

• 2º Conjunto de Atividades

Dando continuidade ao estudo dos dados apresentados na notícia, agora propõe-se a realização de análises buscando compreender as estatísticas e informações sobre o gasto com *fast food*, por habitante, em cada país agrupados por continente.

Concluindo este segundo conjunto de atividades espera-se que os estudantes sejam capazes de:

- Organizar as informações necessárias para desenvolver as atividades usando a planilha eletrônica Calc;

- Identificar os maiores e menores valores, em euros por habitante, de gasto de *fast food* em cada continente;

- Identificar os valores médios e medianos, em euros por habitantes, de gasto com *fast food* em cada continente;

- Comparar os valores médios e medianos, em euros por habitantes, de gasto com *fast food*;

- Julgar qual valor (médio ou mediano) melhor descreve o gasto, em euros por habitantes, de *fast food* de cada continente.

• **Conteúdos**

- Média aritmética simples; mediana; e representação tabular.

• **Procedimentos**

Esse conjunto de atividades visa dar continuidade ao que foi proposto no primeiro conjunto, o qual serão explorados os elementos gerenciamento de dados, interpretação, análises, comunicação escrita das interpretações e comunicação oral, que fazem parte do ciclo investigativo de Wild e Pfannkuch (1999, p. 226).

A atividade é organizada em três momentos:

• o primeiro consiste na retomada dos conceitos estudados no primeiro conjunto de atividades, o que será conduzido pelo(a) professor(a) através em um processo dialógico;

• o segundo direciona-se a análise dos valores médios e medianos de gasto com *fast food* em cada continente por habitante;

• o terceiro centra-se na discussão das soluções obtidas para os questionamentos respondidos e nos cálculos realizados no segundo momento.

Esta atividade é um desdobramento da primeira e nela, com base nos conhecimentos, estratégias e informações já utilizadas, se pretende ampliar as análises e reflexões realizadas, mas desta vez se dará maior ênfase ao uso de recursos computacionais.

- **Atividades e orientações ao(a) professor(a)**

As atividades desse conjunto deverão ser desenvolvidas em um ambiente que possua computadores com acesso ao Calc. Para dar início a atividade, sugere-se que seja retomado o que foi discutido no primeiro conjunto de atividades, buscando destacar os conceitos de média simples e mediana. Na sequência, deverá ser distribuído aos alunos uma folha contendo a Atividade II, que segue abaixo, e orientado que os mesmos respondam aos questionamentos propostos.

Como este conjunto de atividades é uma continuação do primeiro conjunto e serão utilizados os dados da tabela apresentada na Atividade I, caso os estudantes tenham gravado a planilha de dados da primeira atividade, agora eles poderão utilizá-la.

Sugere-se que os alunos respondam aos questionamentos em grupos, pois, além de favorecer a discussão e comunicação oral das conclusões, diferentemente do primeiro conjunto de atividades, não são fornecidas orientações de como proceder utilizando a planilha Calc, cabendo aos discentes, no decorrer da tarefa, relembrarem os comandos utilizados anteriormente e desenvolverem estratégias para gerenciar os dados; e obter, analisar, calcular e interpretar as informações e os resultados.

Após os alunos responderem aos nove questionamentos propostos na Atividade II, para finalizar a atividade sugere-se que seja proposto que os estudantes comuniquem oralmente as conclusões obtidas e as soluções desenvolvidas. Os estudantes também devem ser incentivados a discutirem as formas utilizadas para organizar as informações em tabelas no Calc, com intuito de tornar evidente a eles, as distintas formas de dispor/organizar essas informações em tabelas.

• **Atividade II**

Utilizando o arquivo Calc da Atividade I, acrescente mais uma coluna na tabela de dados sobre gasto com *fast food* e classifique os países identificando o continente em que estão localizados (América, Europa, Ásia, África, Oceania e Antártida). Em seguida, responda:

a) Qual é o maior e o menor valor, por habitante, de gasto com *fast food* em cada continente?

b) Qual é o valor **médio**, por habitante, de gasto com *fast food* em cada continente?

c) Qual é o continente que apresentou maior valor médio, por habitante, de gasto com *fast food*?

d) Qual é o continente que apresentou menor valor médio, por habitante, de gasto com *fast food*?

e) Qual é o valor **mediano**, por habitante, de gasto com *fast food* em cada continente?

f) Qual é o continente que apresentou maior valor mediano, por habitante, de gasto com *fast food*?

g) Qual é o continente que apresentou menor valor mediano, por habitante, de gasto com fast food?

h) Qual o valor (médio ou mediano) melhor descreve o gasto em euros de consumo, por habitante, de *fast food* em cada continente? Por quê?

i) Relate como você determinou os valores dos percentuais dos itens (II.b) e (II. e). Exemplos de questionamentos que podem ser respondidos: Você utilizou os comandos do LibreOffice Calc? Construiu alguma tabela para organizar esses valores?

• **3º Conjunto de Atividades**

Esse último conjunto de atividades se propõe a continuar o estudo de análise de dados, média aritmética simples e mediana, e iniciar o estudo de representações gráficas. Para tal, serão realizadas análises buscando compreender as estatísticas e informações sobre o gasto, por habitante, em *fast food* no ano de 2014 (EL PAÍS, 2016).

Ao final da realização deste conjunto de atividades espera-se que os estudantes sejam capazes de:

- Interpretar quais informações são evidenciadas nos gráficos de colunas simples e nos gráficos de setores;

- Identificar se os valores médios e medianos ficam visíveis/evidentes em cada representação gráfica;

- Identificar qual representação gráfica é mais apropriada para cada conjunto de dados.

• **Conteúdos:**

-Média aritmética simples; mediana; gráfico de colunas simples; e gráfico de setores.

• **Procedimentos**

A atividade será dividida em dois momentos: o primeiro consiste na análise e interpretação das informações evidenciadas em representações gráficas; e o segundo é pautado na discussão das conclusões obtidas a partir das representações gráficas propostas.

Nessa atividade também serão agregados os elementos gerenciamento de dados, interpretação, análises, comunicação escrita das interpretações e comunicação oral, que fazem parte do ciclo investigativo de Wild e Pfannkuch (1999, p. 226).

• **Atividades e orientações ao(a) professor(a)**

Para dar início a atividade, deve ser distribuído aos alunos cópias impressas com as atividades III e IV, que seguem abaixo, e as orientações dos apêndices D e E. Essas atividades deverão ser desenvolvidas em um laboratório de informática ou em um ambiente que tenha computadores com acesso ao *software* Calc.

Nesse conjunto de atividades os alunos poderão utilizar o arquivo do Calc utilizado na Atividade I, pois no mesmo já está digitada a tabela com os dados da notícia que será utilizada. Sugere-se que os alunos respondam aos questionamentos em grupos, pois favorecerá as discussões propostas, possibilitando que diferentes análises e interpretações sejam observadas, confrontadas e debatidas.

Os estudantes também serão orientados a comunicarem por escrito as interpretações obtidas em cada representação gráfica e, após a realização das atividades III e IV, que sejam comunicadas oralmente à turma os resultados e soluções, cabendo ao(a) professor(a) mediar o processo. Nesta etapa final, o(a) professor(a) deverá pontuar diferenças nas representações gráficas propostas, indicando, por exemplo, que:

- os gráficos de colunas simples e os gráficos de setores são apropriados para representar variáveis quantitativas, no entanto, há diferenças entre eles, pois enquanto o primeiro pode ser utilizado quando há um número grande de categorias; o segundo é mais apropriado para representar conjuntos de dados que tenham um número pequeno de categorias, cuja frequência de cada categoria não seja valores muito próximos e quando deseja-se evidenciar a proporcionalidade de cada categoria com relação ao todo (OLIVEIRA; LUZ; BECHER, 2020).

• **Atividade III**

Os dados da notícia "Brasileiros estão entre os maiores consumidores de 'fast food' do mundo" (EL PAÍS, 2016), que são sobre o valor gasto com fast food, por habitante e em cada país, foram informados na Atividade I através de uma tabela. Neste caso, a representação utilizada foi a tabular, mas os dados poderiam ser apresentados através de gráficos. Por isso, neste terceiro conjunto de atividades vamos representar graficamente os dados dessa notícia, buscando analisar e interpretar quais informações são e não são evidenciadas em cada representação proposta; e também se as representações gráficas abordadas não tencionam interpretações equivocadas e incorretas.

Siga as orientações do Apêndice D para construir no Calc um gráfico de colunas simples que utiliza informações da notícia sobre gasto com *fast food* nos países listados na tabela do primeiro conjunto de atividades. A partir desse gráfico, responda:

a) Com essa representação gráfica, você consegue determinar o valor médio gasto em comida rápida, por cada habitante dos países, somente analisando o gráfico? Se sim, descreva a estratégia utilizada. Se não, descreva as dificuldades encontradas.

b) Com essa representação gráfica, você consegue determinar o valor mediano gasto em comida rápida por cada habitante dos países somente analisando o gráfico? Se sim, descreva a estratégia utilizada. Se não, descreva as dificuldades encontradas.

c) Quais informações você consegue identificar sobre o gasto com comida rápida por cada habitante dos países pesquisados ao observar o gráfico de colunas simples plotado?

• **Atividade IV**

Siga as orientações do Apêndice E para construir no Calc um gráfico de setores que utiliza informações da notícia sobre gasto com *fast food* nos países listados na tabela do primeiro conjunto de atividades. A partir desse gráfico, responda:

a) Com essa representação gráfica, você consegue determinar o valor médio gasto em comida rápida, por cada habitante dos países, somente analisando o gráfico? Se sim, descreva a estratégia utilizada. Se não, descreva as dificuldades encontradas.

b) Com essa representação gráfica, você consegue determinar o valor mediano gasto em comida rápida por cada habitante dos países da tabela da Atividade I, somente analisando o gráfico? Se sim, descreva a estratégia utilizada. Se não, descreva as dificuldades encontradas.

c) Quais informações você consegue identificar sobre o gasto com comida rápida, por cada habitante dos países pesquisados, ao observar o gráfico de setores plotado?

d) Ao analisar os dois tipos de gráficos plotados, o de colunas simples (Atividade III) e o de setores (Atividade IV), qual você considera mais apropriado para representar o valor gasto em comida rápida de cada país no ano de 2014? Justifique sua resposta.

Conclusão

O mundo globalizado demanda, cada vez mais, que saibamos quantificar, descrever, analisar e interpretar um número grande de informação e dados, sendo as medidas e representações estatísticas importantes aliadas nesse processo.

Além disso, essas medidas e representações são amplamente utilizadas pelos governos, empresas e mídias para dar a “legitimidade científica que informações ágeis e rápidas necessitam para serem assumidas como confiáveis" e, para monitorar e prever comportamentos das pessoas (OLIVEIRA, p. 89, 2021). No entanto, o uso dessas estatísticas não está inerente a possíveis manipulações de dados, que por vezes guiam os expectadores a conclusões errôneas e precipitadas.

Diante disso, a aprendizagem dos conceitos estatísticos ancorada nas interpretações e análises de dados torna-se fundamental, pois contribuiu para que sejam formados cidadãos mais críticos, reflexivos, capazes de interpretar adequadamente as estatísticas e de identificar quando elas estão sendo utilizadas de forma apropriada e quando estão sendo utilizadas de forma equivocada (LOPES, 2003; OLIVEIRA, 2021; KADER; PERRY, 2006).

Portanto, buscando promover um ensino de Estatística que não explore aspectos estritamente matemáticos, como comumente ocorre no ensino básico brasileiro (CAMPOS, WODEWOTZKI, JACOBINI, 2013, p. 13), nesse capítulo foi apresentada uma sequência didática que buscou explorar interpretações e análises de dados a partir de dados reais e fazendo uso de recursos tecnológicos.

Espera-se que as atividades propostas possam auxiliar os futuros professores de Matemática a elaborarem suas próprias sequências didáticas e que os instiguem a refletir sobre as possibilidades de promover um ensino de Estatística mais significativo, ativo e participativo aos estudantes.

Referências

CAMPOS, C. R.; WODEWOTZKI, M. L. L.; JACOBINI, O. R. **Educação Estatística: teoria e prática em ambien-**

tes de modelagem matemática. Coleção Tendências em Educação Matemática. 2ª ed., Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2013.

EL PAÍS. **Brasileiros estão entre os maiores consumidores de 'fast food' do mundo**. 2016. Disponível em: <https://brasil.elpais.com/brasil/2016/01/21/economia/1453403379_213071.html>. Acesso em: fev. 2020.

GROENWALD, C. L. O. **Refletindo sobre a inclusão das tecnologias digitais na formação inicial de professores de matemática**. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. ano 14. n. 18. p. 210–218, 2019.

KADER, G. D.; PERRY, M. **A framework for teaching statistics within the K-12 mathematics curriculum**. ICOTS-7, 2006. Disponível em: < https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2B3_KADE.pdf>. Acesso em: dez. 2019.

LOPES, C. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2003.

OLIVEIRA, J. C. S. **Atividades investigativas e planilhas eletrônicas: uma proposta para o ensino de Estatística a partir o tema alimentação**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática)– Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Osório, 2021. Disponível em:< http://pergamum.ifrs.edu.br/pergamumweb_ifrs/vinculos/000077/00007752.pdf>. Acesso em: abr. 2021.

OLIVEIRA, J. C. S.; LUZ, B. F.; BECHER, E. L. **Uma possibilidade para o ensino de Estatística mediada pelo uso**

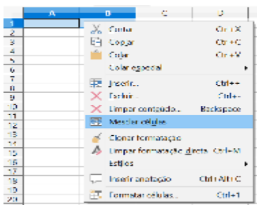
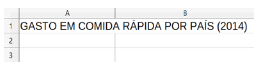
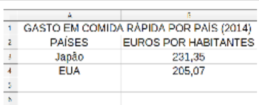
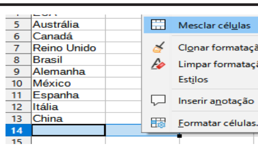
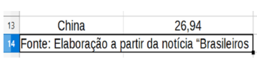
de recursos tecnológicos. p. 124-134, 2020. In: Anais da 9ª MOEXP: trabalhos ensino superior e pós-graduação. Osório, RS: IFRS- Campus Osório, 2020. Disponível em: < http://pergamum.ifrs.edu.br/pergamumweb_ifrs/vinculos/000074/000074e2.pdf>. Acesso em: abr. 2021.

OLIVEIRA, M. M. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

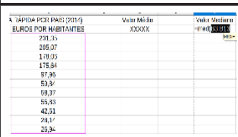
WILD, C.; PFANNKUCH, M. **Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical**. Review, v.67, n.3, p.223-265, 1999.

Apêndices

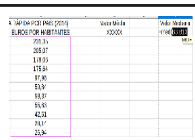
Apêndice A - Orientações preliminares para a realização da Atividade I com o auxílio do LibreOffice Calc

Orientações a atividade (I) usando o LibreOffice Calc		
Passos	Ícone	Orientações
1º		Abrir o LibreOffice Calc.
2º		Criar uma tabela com os dados da tabela da Atividade I.
3º		Para isso, selecionar com o mouse a primeira linha das colunas A e B, apertar com o botão esquerdo do mouse e selecionar a opção mesclar células.
4º		Digitar o nome da tabela na primeira linha.
5º		Digitar na segunda linha e coluna A o nome “PAÍSES”, e na segunda linha coluna B o nome “EUROS POR HABITANTE”.
6º		Na coluna A digitar o nome de cada país em uma linha e ao lado, na coluna B, o respectivo valor gasto em comida rápida.
7º		Na sequência, na linha 14, mesclar as células das colunas A e B.
8º		Após, digitar na linha 14: “Fonte: Elaboração a partir da notícia “Brasileiros estão entre os maiores consumidores de ‘fast food’ do mundo””.

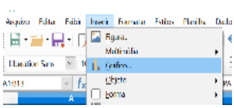
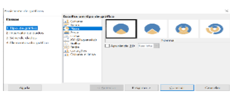
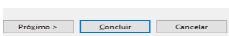
Apêndice B - Orientações para responder o item a) da Atividade I

Orientações para responder o item I.a)		
Passos	Ícone	Orientações
1º	D Valor Médio	Digite na primeira linha da coluna D “Valor médio”.
2º	D Valor Médio =média(	Na segunda linha da coluna D, digite: “=média(”
3º		Na sequência, selecione com o mouse os valores gastos em comida rápida pelos países listados na tabela.
4º	D Valor Médio =média(B3:B13)	Em seguida feche os parênteses e aperte a tecla enter.
5º	D Valor Médio XXXXX	O valor médio aparecerá na segunda linha da coluna D.

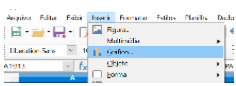
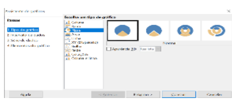
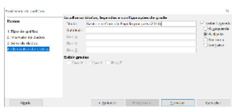
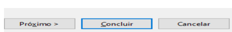
Apêndice C - Orientações para responder o item c) da Atividade I

Orientações para responder o item I. c)		
Passos	Ícone	Orientações
1º	F Valor Mediano	Digite na primeira linha da coluna F “Valor mediano”.
2º	F Valor Mediano =med(	Na segunda linha da coluna F, digite: “=med(”
3º		Na sequência, selecione com o mouse os valores gastos em comida rápida pelos países listados na tabela.
4º	F Valor Mediano =med(B3:B13)	Em seguida feche os parênteses e aperte a tecla enter.
5º	F Valor Mediano XXXXX	O valor mediano aparecerá na segunda linha da coluna F.

Apêndice D- Orientações para construir o gráfico da Atividade III

Orientações para construir o gráfico da Atividade III		
Passos	Ícone	Orientações
1º		No arquivo LibreOffice Calc da Atividade I, selecionar com o mouse os dados da tabela, isto é, da primeira linha até a décima terceira linha, e da coluna A até a coluna B.
2º		Ainda com os dados selecionados, selecionar as opções Inserir > Gráfico que encontram-se na parte superior esquerda da tela.
3º		Irá abrir uma caixa, no qual as opções tipo de gráfico Coluna e Normal deverão ser selecionadas.
4º		Na sequência, selecionar a opção Concluir e o gráfico será plotado.

Apêndice E- Orientações para construir o gráfico da Atividade IV

Orientações para construir o gráfico da Atividade IV		
Passos	Ícone	Orientações
1º		No arquivo LibreOffice Calc da Atividade I, selecionar com o mouse todos os dados da tabela, isto é, da primeira linha até a décima terceira linha, e da coluna A até a coluna B.
2º		Ainda com os dados selecionados, selecionar as opções Inserir > Gráfico que encontram-se na parte superior esquerda da tela.
3º		Irá abrir uma caixa, no qual as opções tipo de gráfico Pizza e Normal deverão ser selecionadas.
4º		Na sequência, selecionar a opção Elementos do gráfico e escrever na caixa de Título: GASTO EM COMIDA RÁPIDA POR PAÍS (2014).
5º		Para finalizar, selecionar a opção Concluir e o gráfico será plotado.

Construções geométricas com régua e compasso

Mariana Nunes Barato
Monalisa da Silva

No ensino de Geometria a utilização de ferramentas manuais de desenho torna o ensino de conceitos geométricos mais compreensível aos alunos, considerando ainda que potencializam as aprendizagens de geometria baseadas na compreensão, interpretação e representação dos objetos de estudo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) afirmam que os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio desses, os alunos desenvolvem um tipo especial de pensamento que lhes permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998).

Para Wagner (2000), as construções geométricas são uma interpretação da realidade, feita por meio de uma representação gráfica. É grande a importância das construções geométricas para os alunos e professores, uma vez que estas compõem a Geometria, além de desempenharem papel de destaque na compreensão dos conhecimentos da matemática elementar.

Nas construções geométricas com régua e compasso, uma etapa tão importante quanto a construção é sua justificativa, momento em que são validados todos os passos feitos ao longo da construção e que acaba por demonstrar o domínio de conceitos matemáticos que o indivíduo possui.

Instrumentos utilizados nas construções geométricas

Segundo Wagner (2000), as construções com régua e compasso tiveram enorme importância no desenvolvimento da matemática grega, tendo seus primeiros vestígios já no século V a.C., por meio dos pitagóricos[1]. Desde Os Elementos de Euclides, obra construída por volta de 300 a.C., o desenho geométrico vem fazendo parte do aprendizado de conceitos relacionados à Geometria Plana. A proposta de Euclides, ao sistematizar e organizar em sua obra os conhecimentos de geometria que existiam na sua época, era possibilitar a construção de uma figura usando régua e compasso e não, simplesmente, a execução do traçado da figura com esses instrumentos.

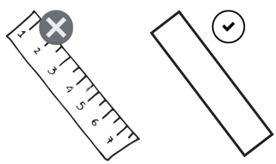
[1] Os pitagóricos constituíam uma sociedade secreta com bases matemáticas e filosóficas, instituída por Pitágoras de Samos, ficando mais conhecida por Escola Pitagórica, de onde muitas descobertas surgiram, sendo os créditos sempre atribuídos ao mestre. (BOYER, 1974).

> Não há geometria sem régua e compasso. [...] O aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita muito a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de "concretização" do conhecimento. [...] Em todas as interfaces que a Matemática faz com a linguagem gráfica, o conhecimento de Desenho entra como ferramenta enriquecedora. (ZUIN, 2001, p. 177).

Desta forma, o que se pode dizer sobre a utilização das construções geométricas no ensino de Geometria é que ensinar geometria sem utilizar instrumentos de construções geométricas é como retirar de um todo uma das partes mais importantes do processo de aprendizagem. (WAGNER, 2000; ZUIN, 2001).

A Régua

A régua, preferencialmente não graduada, é usada exclusivamente para ligar dois pontos e construir retas, semirretas ou segmentos de reta.



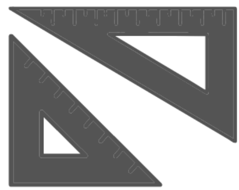
Compasso

O compasso é um instrumento com muitas utilidades nas construções geométricas. Entre elas estão: construção de circunferências, arcos, ângulos, transporte de ângulo e segmentos. Ele possui duas hastes: uma chamada ponta seca, onde encontramos uma ponta metálica e na outra encontra-se o grafite que

deve estar sempre apontado. As duas hastes do compasso devem ter o mesmo tamanho.

Esquadro

Note que o esquadro não é considerado um instrumento euclidiano, porém aqui foi acrescentado como um instrumento auxiliar. Há dois tipos de esquadros, um deles possui ângulos de 45°, 45° e 90° (esse esquadro é comumente chamado de esquadro de 45° ou isósceles), o outro possui ângulos de 30°, 60° e 90° (sendo esse chamado de esquadro de 60° ou, ainda, escaleno).



Sequência didática

O ensino de Matemática para o 8º ano do ensino fundamental, conforme previsto pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), prevê o estudo de alguns conceitos de Geometria como, por exemplo, congruência de triângulos, transformações geométricas como simetrias de translação, reflexão e rotação e, além disso, apresenta mais dois objetos de conhecimento que serão desenvolvidos neste capítulo: as construções geométricas e o estudo de mediatriz e bissetriz, que nos levarão à sequência didática proposta a seguir.

No cenário da sequência didática elaborada, já foram trabalhados pelo professor alguns dos pontos notáveis do triângulo: o ortocentro e o baricentro, sendo que seus conceitos serão retomados rapidamente no início das atividades. Posteriormente, serão introduzidos os conceitos dos demais pontos notáveis: circuncentro e incentro, inclusive sua aplicação quanto às relações de circunscrição e inscrição dos triângulos trabalhados com as circunferências. Tudo isso desenvolvido através de construções geométricas com régua e compasso.

No primeiro bloco de atividades, através das *Construções Elementares*, o objetivo é proporcionar um primeiro contato dos alunos com as construções geométricas, orientar a utilização da régua e do compasso e, principalmente, instigar e incentivar os estudantes a contribuírem com suas ideias ao longo da construção para que esses consigam realizar as *Construções Avançadas* do segundo bloco de maneira mais autônoma.

O objetivo final, com a proposta do segundo bloco de atividades, é que os alunos possam desenvolver as construções com seus pares, sem maiores intervenções do professor, apenas levando em consideração os conceitos anteriormente trabalhados nas construções elementares e, posteriormente, justificarem os passos feitos ao longo da construção.

A fim de estruturar a sequência didática, foram listadas algumas informações iniciais que nortearão sua execução, conforme tabela a seguir:

Informações iniciais para o desenvolvimento da sequência didática	
Tema	Pontos notáveis do triângulo: circuncentro e incentro.
Ano letivo	8º ano do Ensino Fundamental
Tempo estimado	3 períodos de 45 minutos cada
Habilidades Desenvolvidas	EF06MA22: Utilizar instrumentos, como régua e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. EF07MA22: Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. EF07MA24: Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º. EF08MA15: Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90º, 60º, 45º e 30º e polígonos regulares. EF08MA17: Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
Recursos Utilizados	Pelos alunos: folhas de ofício, régua[2], compasso, esquadro, lápis e borracha. Pelo professor: quadro branco, régua, compasso e caneta para quadro branco.

Procedimentos e atividades

• **Orientações ao professor:**

Inicialmente, caso este seja o primeiro contato da turma com as construções geométricas, é necessário que o docente apresente as ferramentas e, principalmente, oriente o aluno a respeito do compasso, fazendo a diferenciação entre a sua ponta seca e a ponta onde se localiza o lápis.

Além disso, ao optar por desenvolver atividades deste tipo em sala de aula, é bom ressaltar que elas demandam uma série de conceitos matemáticos que, em dado momento, serão mencionados ao longo das construções e o seu domínio acaba por facilitar os procedimentos de maneira geral. É pressuposto que os alunos já conheçam a definição de figuras planas trabalhadas em anos letivos anteriores, e também tenham alguma familiaridade com a escrita e os símbolos matemáticos.

Desse modo, propõe-se que no início das atividades seja entregue aos alunos uma espécie de dicionário, com a relação dos significados de conceitos matemáticos que aparecerão ao longo das atividades para que, caso seja necessário, os alunos possam consultá-lo. A lista de definições que auxiliará nas construções em questão, é a seguinte:

---

[2] Note que como a graduação da régua não será utilizada, basta qualquer ferramenta que delimite um segmento de reta. Assim como a folha de ofício, que pode ser substituída pela folha do caderno, mas acredita-se que assim possa ser evitado qualquer tipo de confusão com as linhas da folha e as criadas.

Mediatriz	Reta[3] que se posiciona perpendicularmente em relação a outra, interseccionando o seu ponto médio, dividindo-a exatamente ao meio.
Bissetriz	Semirreta que divide um ângulo em lados congruentes.
Perpendicular	Duas retas são perpendiculares quando são concorrentes e formam um ângulo reto em sua interseção.
Circunscrita	Polígonos circunscritos estão no exterior de outro e apresentam todos os seus lados tangentes a esse.
Inscrita	Polígonos inscritos são aqueles que estão no interior de outro, de modo que todos os seus vértices são pontos desse.
Equidistante	Que, em relação aos demais, apresenta a mesma distância, ou seja, objetos equidistantes.

Nas construções com régua e compasso, consideramos algumas construções como elementares, ou seja, construções iniciais que compõem a maior parte das construções mais avançadas. Podemos considerar como construções elementares: transferência de ângulo, mediatriz, perpendicular, paralela, bissetriz e divisão de um segmento em

[3] Ao longo dessa explanação podem surgir dúvidas quanto à diferenciação entre reta, semirreta e segmento de reta. Assim, é válido lembrar que a reta é formada por infinitos pontos que estão alinhados, sendo ilimitada nos dois sentidos. A semirreta possui um ponto de origem (início), mas no outro sentido é ilimitada (infinita). E o segmento de reta é limitado por dois pontos da reta, ou seja, tem um ponto de início e outro de fim, sendo finita.

partes iguais. Nas construções apresentadas aqui, precisaremos de três construções elementares: a construção da mediatriz, da bissetriz e da perpendicular, por isso iniciamos com o passo a passo dessas no primeiro bloco de atividades.

Neste trabalho propõe-se que as construções elementares sejam feitas em sala de aula, antes da construção do circuncentro e do incentro, mesmo que essas construções elementares sejam retomadas ao longo das duas construções principais, apenas para que o aluno consiga visualizar os conceitos de mediatriz, bissetriz e perpendicular de maneira clara, aplicando-os com maior facilidade dentro de outras construções posteriormente. Caso o professor não disponibilize de tanto tempo quanto necessário para isso, pode também propor que os alunos façam essas construções elementares em casa, até mesmo para testarem sua habilidade com régua e compasso. Se assim for, os alunos terão este passo a passo que orientará a construção, bem como a imagem final que servirá de gabarito.

Para dar início às atividades, o professor relembrará os alunos sobre os pontos notáveis que já foram trabalhados: baricentro, que é o ponto de interseção (ou ponto de encontro) das medianas do triângulo e as divide em uma razão de 1 para 2 e; o ortocentro, que é o ponto de interseção das alturas do triângulo.

Em seguida, apresentará aos alunos os conceitos de incentro e circuncentro, conforme descrito abaixo.

Incentro é o ponto de interseção (ou ponto de encontro) das bissetrizes internas do triângulo, além de ser o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Circuncentro é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo, sendo também o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Após a conceituação de Incentro e Circuncentro e de posse dos recursos listados anteriormente, professor e alunos iniciarão as construções. O professor deixará claro que o objetivo geral desta atividade é que os alunos consigam encontrar o circuncentro e o incentro de triângulos e que, através da utilização das construções geométricas, além de atingir esse objetivo, os alunos também estejam envolvidos em uma atividade que engloba uma diversidade de conceitos matemáticos, potencializando a aprendizagem de Geometria Plana.

Para se chegar ao objetivo, o primeiro bloco de atividades é destinado às construções elementares que, em seguida, serão o ponto de partida para as construções avançadas. Neste primeiro bloco, a ideia é que os alunos partam dos conceitos de mediatriz, bissetriz e perpendicular para dar início as suas respectivas construções. Como provavelmente este será o primeiro contato dos alunos com as construções geométricas, o professor terá que tomar a frente para iniciar as construções, sempre tentando fazer com que os alunos acompanhem, questionem e sugiram novos passos.

O professor estará fazendo as construções no quadro enquanto os alunos a reproduzem no caderno. No momento de justificar as construções deste primeiro bloco, é interessante que o professor tente fazer algumas construções auxiliares para que o aluno possa visualizar com maior facilidade.

Partindo para o segundo e último bloco de atividades, considerando que os alunos já foram apresentados ao conceito de incentro e circuncentro, a proposta é que iniciem a construção de ambos com seus pares e o professor intervindo somente para esclarecer dúvidas e, quando necessário, sugerir algum passo mais específico para o estudante evoluir na construção.

A justificativa dessas duas construções finais deverá ser feita em conjunto, através de uma discussão conjunta dos alunos e professor.

Como o trabalho a partir das construções geométricas pode também ser inédito para o professor, ao final de cada bloco foram sugeridas algumas modificações nas construções, que podem agregar diferentes tipos de discussões, sendo todas as construções geométricas apresentadas neste trabalho foram baseadas em Wagner (2000; 2015).

1º Bloco de atividades - Construções elementares

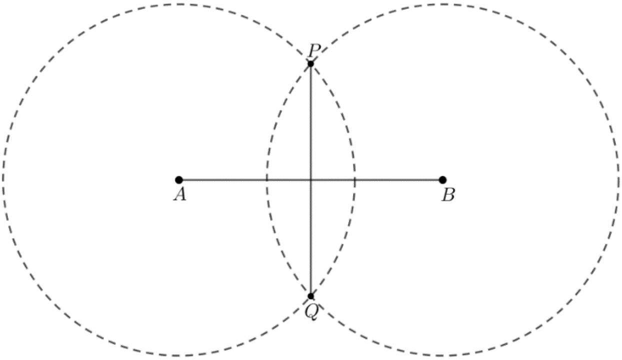
1) Mediatriz

Dado um segmento AB, traçar sua mediatriz:

Com abertura do compasso maior que a metade de , trace duas circunferências de mesmo raio, uma com centro em A e outra com centro em B.

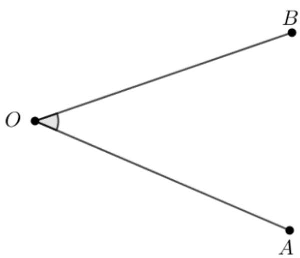
Os pontos de interseção entre as circunferências serão P e Q.

Trace o segmento PQ, sendo este a mediatriz de $\overline{AB}$.



Justificativa: por construção, temos o losango APBQ que, por propriedade, tem as diagonais AB e PQ que se interceptam em seus pontos médios, perpendicularmente. Logo, temos que PQ é mediatriz de AB.

2) Bissetriz

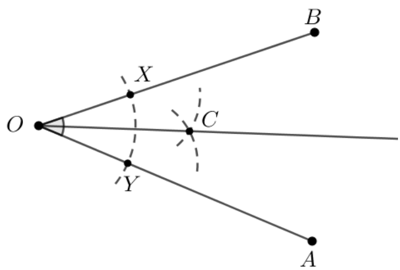


Traçar a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$:

Com centro no vértice O do ângulo, trace um arco de circunferência que intercepte $\overline{OB}$ em X e $\overline{OA}$ em Y.

Trace outros dois arcos de mesmo raio e maiores que a metade de $\overline{XY}$, um com centro em X e outro com centro em Y, sendo a sua interseção o ponto C.

Trace o segmento OC. Assim, $C\hat{O}A = C\hat{O}B$.

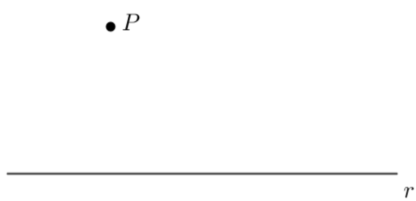


Justificativa: por construção, $\overline{OC}$ e $\overline{OY}$ são iguais, assim como os segmentos $\overline{CX}$ e $\overline{CY}$. Desse modo, os triângulos OCX e OCY são congruentes pelo caso LLL. Logo, $C\hat{O}X = C\hat{O}Y$, ou seja, $C\hat{O}A = C\hat{O}B$.

3) Perpendicular

1º caso

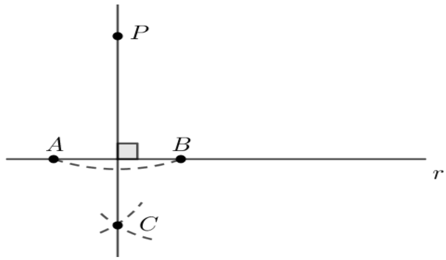
Traçar uma perpendicular à reta r, passando pelo ponto P externo a essa:



Com ponta seca do compasso em P, trace um arco de circunferência que intercepte a reta r nos pontos A e B.

Após, com abertura do compasso maior que a metade de $\overline{AB}$, trace dois arcos de mesmo raio, um com centro em A e outro com centro em B. Sua interseção será o ponto C.

Logo, $\overline{CP}$ determina a reta perpendicular a r.



Justificativa: Ao determinar os pontos de interseção com r, A e B, delimitamos um segmento de reta AB, e a construção da mediatriz de $\overline{AB}$ e o fato de $\overline{AP}$ = $\overline{PB}$ e $\overline{CA}$ = $\overline{CB}$ garantem que P e C pertencem a esta mediatriz, logo $\overline{CP}$ é a reta desejada.

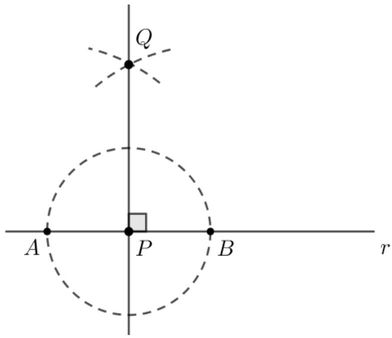
2º caso

Traçar uma perpendicular à reta r, passando pelo ponto P pertencente a essa:

Com ponta seca do compasso em P, faça uma circunferência que intercepte a reta r nos pontos A e B.

Após, com abertura do compasso maior que a metade de $\overline{AB}$, faça dois arcos de circunferência de mesmo raio, um com centro em A e outro com centro em B. Sua interseção será o ponto Q.

Logo, $\overline{PQ}$ determina a reta perpendicular a r.



Justificativa: Ao determinar os pontos de interseção com r, A e B, delimitamos um segmento de reta AB, e a sua mediatriz, construída de modo análogo, garante que $\overline{PQ}$ é perpendicular a r.

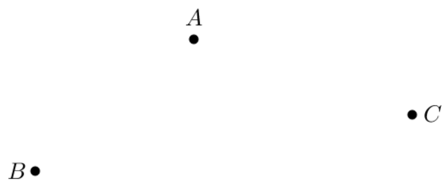
- **Sugestões ao professor:**

Os alunos farão as construções desde o início, ou seja, desde o desenho inicial da reta ou do ângulo que dará origem à construção final, então é interessante instigar os alunos quanto à diversidade que surge disso, considerando que cada aluno partiu de construções singulares para chegar a uma verificação em comum. Inclusive, se algum estudante optar por desenhar uma reta na vertical ou um ângulo com sua abertura para cima ou para baixo, ao invés de para os lados, melhor ainda. Surgem visualizações diferentes de um mesmo objeto matemático.

2º Bloco de atividades - Construções avançadas

1) Circuncentro

Traçar a circunferência que passa por 3 pontos dados (ou pelo triângulo):



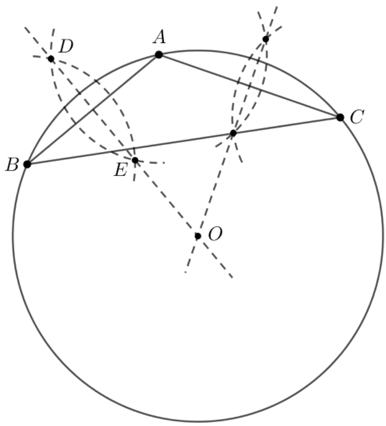
Dados os pontos A, B e C, interligue-os formando o triângulo ABC.

Trace a mediatriz de pelo menos dois lados do triângulo.

Começando pelo lado AB, com raio maior que a metade do segmento, trace um arco de circunferência com centro em B, que intercepte $\overline{AB}$. Após, com a mesma abertura do compasso, trace o arco de circunferência com centro em A, interceptando o arco anterior em dois pontos D e E. A reta que passa por D e E é a mediatriz do lado AB.

Faça o mesmo para um dos outros dois lados do triângulo.

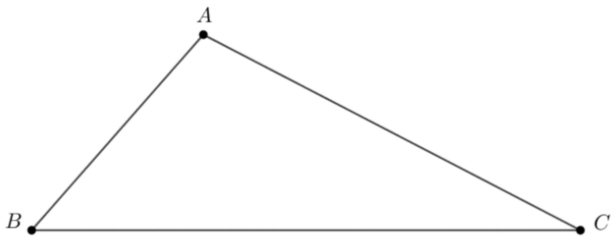
A interseção entre as mediatrizes se dará no ponto O. Com centro neste ponto, trace uma circunferência de raio $\overline{OB}$. Note que o ponto O é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo formado, sendo também o circuncentro deste.



Justificativa: Por definição, qualquer ponto pertencente à mediatriz de um segmento equidista dos extremos deste. Como o ponto O está sobre a mediatriz dos três lados do triângulo dado, ele está a uma mesma distância de seus vértices. Logo, traçando a circunferência com raio igual à medida de O até um dos vértices do triângulo, obtém-se a circunferência circunscrita ao triângulo formado pelos três pontos dados.

2) Incentro

Construir a circunferência inscrita num triângulo dado:

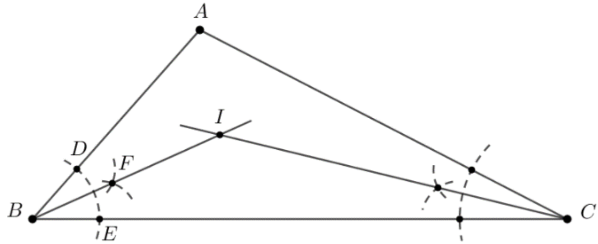


Encontre o ponto de interseção das bissetrizes internas do triângulo.

Para isso, é suficiente traçar duas das três bissetrizes.

Para traçar a bissetriz de $\hat{B}$, faça um arco de circunferência com centro em B que intercepte $\overline{AB}$ em D e $\overline{BC}$ em E. Com a abertura do compasso maior que a metade de $\overline{DE}$, faça dois arcos de mesmo raio no mesmo sentido do arco anterior, um com centro em D e outro com centro em E, obtendo o ponto de interseção F. A reta que passa por B e F é bissetriz de $\hat{B}$. Faça o mesmo para $\hat{C}$ ou $\hat{A}$.

As bissetrizes se encontram em um ponto I, denominado incentro.

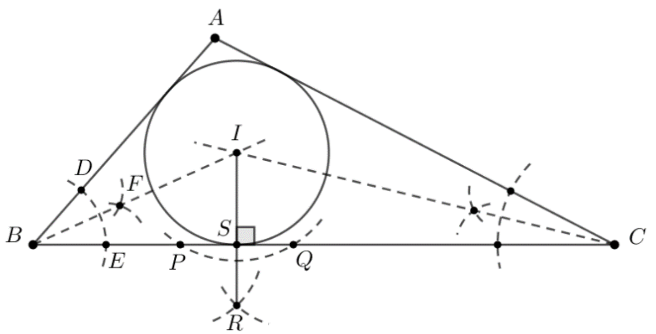


Trace uma perpendicular a um dos lados do triângulo, passando por I.

Escolhendo o lado $\overline{BC}$, faça um arco com centro em I, interceptando o lado BC nos pontos P e Q. Após, com abertura do compasso maior que a metade de $\overline{PQ}$, trace dois arcos de mesmo raio, cada um centrado em um dos vértices do segmento, obtendo o ponto de interseção R.

A reta que passa por $\overline{IR}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$.

O ponto S será o ponto de encontro entre a perpendicular e $\overline{BC}$. Construção a circunferência centrada em I e raio $\overline{IS}$, que é a circunferência inscrita no triângulo ABC.



Justificativa: Por definição, qualquer ponto pertencente a bissetriz de um ângulo está a uma mesma distância dos lados deste ângulo que, neste caso, formam os lados do triângulo. Como o ponto I está sobre a bissetriz dos três ângulos do triângulo dado, é equidistante aos três lados deste. Logo, traçando a perpendicular a um dos lados do triângulo passando por I, obtém-se o raio da circunferência inscrita ao triângulo dado.

• **Sugestões ao professor**

Na construção do circuncentro, a primeira mudança que envolveria mais conceitos e, consequentemente, uma maior reflexão por parte dos estudantes é, no lugar de fazer o triângulo a partir de três pontos quaisquer, propor a construção a partir de diferentes tipos de triângulo. Ou seja, separar os estudantes por grupos e cada um desses fazer a construção a partir de triângulos retângulos, ou acutângulos, ou obtusângulos.

No triângulo retângulo os alunos constatariam que o circuncentro coincide com o ponto médio da hipotenusa do triângulo. No triângulo obtusângulo, o circuncentro se localiza no exterior do triângulo, enquanto que no acutângulo, no interior.

Para a construção do triângulo retângulo, como os alunos já sabem construir uma perpendicular, trabalhada nas construções elementares, basta apenas juntar essa informação para a construção do triângulo, ou então utilizar o esquadro para a construção do ângulo reto.

O mesmo vale para a construção do incentro, mesmo este ponto sempre se localizando no interior do triângulo, os alunos podem variar as construções entre os diferentes tipos de triângulos.

Ainda, pensando na representação de diferentes triângulos, pode-se pensar em uma atividade onde sejam dados os lados de um triângulo, para que então esse seja criado com régua e compasso. A partir dessa construção, os alunos poderão perceber que, conforme as medidas dos lados, é impossível construir o triângulo, constatando que há uma condição de existência entre essa categoria de polígonos.

Considerações finais

A era tecnológica traz desafios à educação Matemática no sentido de que estabelece a utilização de ferramentas como computadores que dependem de internet e, muitas vezes, de softwares, restringindo assim a sua implementação em sala de aula àquelas instituições de ensino com maior infraestrutura.

Nesse sentido, uma alternativa para a utilização de ferramentas – também tecnológicas – mais acessíveis é investir em réguas e compassos e incorporar as construções geométricas aos planejamentos do ensino de Matemática da educação básica.

Acredita-se que tenha sido possível apresentar aos professores e futuros professores uma possibilidade inicial de trabalho a partir dessas ferramentas, assim como instigá-los acerca das inúmeras possibilidades que as construções geométricas com régua e compasso possuem.

Referências

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: Matemática**. Brasília: MECSEF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2000. v. 4.

WAGNER, E. **Uma introdução às construções geométricas**. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

ZUIN, E. D. S. L. **Da Régua e do Compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. Belo Horizonte: Dissertação de Mestrado Universidade Federal de Minas Gerais, 2001.

Resolvendo problemas a partir do Princípio Fundamental da Contagem

Tamires Bon Vieira
Fabiana Gerusa Leindeker da Silva

A análise combinatória é a parte da matemática que se designa a estudar os métodos e técnicas que permitem resolver problemas que envolvem contagem (IEZZI, 2007, p. 370).

Os documentos oficiais do Ministério da Educação (MEC), como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destacam competências e habilidades relativas a processos investigativos, consideradas necessárias para que os alunos desenvolvam sua capacidade de representar, argumentar, comunicar e elaborar estratégias para solucionar problemas construindo modelos matemáticas válidos na solução de outros problemas. Nesse sentido, ensinar a contagem, permite "o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório." (PCN+, p. 126)

O ensino de Análise Combinatória é um desafio para muitos professores de Ensino Médio. Sendo possível que essa dificuldade esteja relacionada à forma que o docente aborda este conteúdo, definindo os diferentes agrupamentos mais utilizados em problemas de contagem, entregando já no início os nomes arranjo, permutação, combinação e suas fórmulas.

Ao fazer isso, o professor pode levar o aluno a pensar que todo e qualquer problema de Análise Combinatória poderá e deverá ser resolvido com uso das fórmulas de agrupamento que foram definidas em aula, e, a única tarefa que lhe resta para resolver um problema de contagem será descobrir qual o tipo de agrupamento que o problema está abordando e aplicar a fórmula correspondente.

Para o ensino deste conteúdo propomos que o aluno seja colocado em lugar de protagonista dos problemas abordados, tomando decisões, organizando o pensamento e criando estratégias para decidir a forma mais adequada de contar os possíveis casos de uma determinada situação. Sugerimos que os problemas de contagem sejam resolvidos a partir do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), visto que as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) aconselham que a contagem "não deve ser aprendida como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação." (PCN +, 2006, p. 126).

Princípio Fundamental da Contagem

Há dois princípios de contagem que são base para resolver problemas de análise combinatória: o princípio da adição e o princípio da multiplicação. O primeiro diz que se o objetivo é contar um conjunto de objetos, pode-se dividir essa tarefa em duas partes, contar as partes separadamente e somar os resultados. Já o segundo princípio, também chamado Princípio Fundamental da Contagem, PFC, de acordo com Lima (2006, p. 103) diz que "se há modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há $y$modos de tomar a decisão D_2 , então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e é D_2 ".

Utilizaremos o PFC em nossa proposta de sequência didática de Análise Combinatória, visto que "é a principal técnica para a resolução de problemas de contagem" (IEZZI, 2007, p. 376). Para tanto, sugerimos em nossa sequência possíveis diálogos e instruções que irão auxiliar o professor ao conduzir o aluno a compreender o PFC e usá-lo como estratégia nos problemas de contagem.

Análise Combinatória

A Análise Combinatória ou somente Combinatória, pode ser vista por alguns como o simples estudo de permutações, arranjos e combinações. Apesar da Análise Combinatória dispor desses conceitos e técnicas que permitem resolver certos tipos de problemas, é preciso mais que isso para solucionar um problema. É preciso engenhosidade, estratégias e compreensão do enunciado (MORGADO, 2006, p. 2).

A partir do PFC é possível determinar as fórmulas dos principais tipos de agrupamentos em Análise Combinatória como:

Permutação: Na matemática, a permutação também é tratada como troca ou permuta de elementos. Para permutar elementos deve-se calcular o produto das possibilidades para cada uma das n posições. Usando o PFC é possível chegar a seguinte fórmula:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Chama-se fatorial de um número natural, ou $n!$, o produto dos n primeiros inteiros positivos.

Arranjo: É um tipo de agrupamento suficientemente caracterizado no princípio fundamental da contagem. "dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo dos n elementos, tomados k a k, qualquer sequência ordenada de n elementos distintos escolhidos entre os existentes" (IEZZI, 2007, p. 376). Usando o PFC, é possível chegar a fórmula que determina a quantidade de arranjos dos n elementos tomados k a k, que denotaremos por $A_{n,k}$:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Até aqui a ordem em que os elementos estão dispostos é importante. Existem, também, situações em que a ordem na qual os elementos estão dispostos não faz diferença na contagem.

Combinação: Problemas em que a ordem da escolha ou disposição dos elementos não é relevante. No geral, quando existe um conjunto A com n elementos, chama-se combinação dos n elementos de A tomados k a k, com $n \geq k$, qualquer subconjunto de A formado por k elementos. (IEZZI, 2007. p. 381). Usando o PFC é possível determinar uma fórmula para calcular a quantidade de combinações possíveis, denotaremos por $C_{n,k}$:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Tais fórmulas, podem nos auxiliar na resolução de problemas de contagem. No entanto, conforme mencionado anteriormente, a Análise Combinatória não se resume a problemas padrões nos quais só é preciso ter conhecimento das fórmulas.

> "se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas." (MORGADO, 2006, p. 2)

Nesse sentido, sugerimos que primeiro sejam trabalhados diversos problemas de contagem utilizando o PFC, munindo os alunos com estratégias e técnicas de resolução. Somente depois serão realizadas as deduções das fórmulas dos agrupamentos, visto que "devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande" (PCN+, 2006, p. 126-127).

Atividades propostas

Ao resolver um problema de Análise Combinatória, o aluno deve ser instigado a tomar algumas atitudes e criar estratégias. O professor deve estimular o aluno a se colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e verificar quais decisões devem ser tomadas (LIMA, 2016, p. 86). Com isso, o estudante deixa de ser passivo e passa a ser protagonista na resolução do problema e ainda torna mais claro as decisões que deverão ser tomadas durante a resolução.

A seguir, apresentamos atividades nas quais serão abordadas situações problemas de contagem, seguidas de sugestões de instruções e diálogos que o professor pode utilizar para, discretamente, orientar seus alunos ao êxito na resolução dos problemas propostos, utilizando, como ferramenta principal o PFC. Estas propostas são resultado do Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática do IFRS - *Campus Osório* elaborado pela primeira autora.

Proposta 1: São fornecidos para cada aluno um dado em forma de tetraedro regular com os números e 1 gravados em suas pontas e uma tabela para anotações, conforme a Tabela 1 e Figura 1. Cada aluno deverá realizar, para cada rodada, dois lançamentos sucessivos e anotar na tabela, no local destinado ao primeiro e segundo lançamento, os números obtidos na ponta do dado que está voltada para cima.

Figura 1: Dado em forma de tetraedro regular.

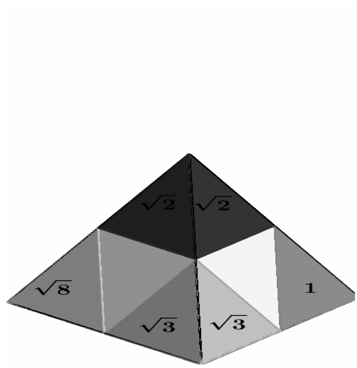


Tabela 1: tabela de anotações

Rodada	1º Lançamento	2º Lançamento
1ª		
2ª		
3ª		
4ª		

Caso esta atividade seja inviável de ser realizada na prática, o professor pode instigar os alunos a se colocarem no lugar da pessoa que está realizando o lançamento dos dados e preencher a tabela com possíveis resultados.

Após os estudantes realizarem alguns lançamentos, devem ser direcionados às seguintes instruções:

- Escreva três resultados diferentes de possíveis sequências. Como nenhum aluno pensa igual ao outro, haverá respostas diferentes.

- Há possibilidade de ocorrer uma sequência diferente das que você escreveu? (sim). Caso o aluno responda que não, a próxima instrução o ajudará a pensar diferente.

- Confira com o colega ao lado se os resultados que ele escreveu são iguais aos seus. Aqui o aluno perceberá que, embora o resultado do colega seja diferente, também está correto e que não existem apenas três possíveis resultados de sequência.

- Quando se lança a primeira vez o dado, de quantas formas o resultado deste lançamento pode ocorrer? (4).

- Quando o dado é lançado pela segunda vez, de quantas formas pode ocorrer o resultado deste lançamento? (4).

- Pelo princípio fundamental da contagem, quantas e quais são as possíveis sequências obtidas em dois lançamentos sucessivos de um dado em forma de um tetraedro regular?

($4 \cdot 4 = 16$ sequências).

Abaixo se apresentam todas as possíveis sequências:

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{3}), (\sqrt{2}, \sqrt{8}), (\sqrt{2}, 1),$$
$$(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, \sqrt{2}), (\sqrt{3}, \sqrt{8}), (\sqrt{3}, 1),$$
$$(\sqrt{8}, \sqrt{8}), (\sqrt{8}, \sqrt{2}), (\sqrt{8}, \sqrt{3}), (\sqrt{8}, 1),$$
$$(1, 1), (1, \sqrt{2}), (1, \sqrt{3}), (1, \sqrt{8}).$$

Este problema também pode ser explorado quando o professor estiver trabalhando probabilidade, reformulando-o, por exemplo, da seguinte forma: Um dado em forma de tetraedro regular, com os números $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{8}$ e 1 gravados em suas pontas, conforme a Figura 1, é lançado duas vezes sucessivamente e os números da ponta voltada para cima são anotados em uma tabela. Qual a probabilidade de que o produto dos números obtidos na sequência dos dois lançamentos, seja um número irracional? Além deste, é possível elaborar eventos diferentes para o cálculo de probabilidade.

Para dar sequência ao estudo de Análise Combinatória sugere-se uma situação que envolve permutação.

Proposta 2: Uma família de cinco pessoas está viajando e pretende tirar uma foto de recordação, onde todos aparecem lado a lado. Cada disposição dessas pessoas na foto é considerada uma foto diferente. Quantas fotos distintas podem ser registradas?

Ao propor essa situação problema, podemos sugerir que o aluno se coloque no lugar de fotógrafo da família. Sugerimos que o professor faça grupos de três ou quatro estudantes para resolverem a questão usando as seguintes cartinhas (Figura 2), cada uma contendo um membro da família.

Figura 2: Membros da família imagens de avatares criados no aplicativo Zmoji).

- Considerando que cada personagem é um membro da família e que você é o fotógrafo que deve realizar a sessão de fotos. Que atitude você irá tomar primeiro? (decidir qual personagem ocupa o primeiro lugar da foto e assim sucessivamente até que todos os lugares sejam preenchidos).

É natural que os alunos manipulem as cartinhas até que entendam o que está acontecendo em cada disposição possível entre os membros da família.

- Todos os membros da família devem aparecer nas fotos? (sim)

- Qual é a primeira decisão? De quantas maneiras distintas pode-se tomar a primeira decisão? (Escolher qual membro da família ocupará a primeira posição na foto; cinco maneiras).

- Qual é a segunda decisão? De quantas maneiras distintas pode-se tomar a segunda decisão e por quê? (Determinar qual membro da família ocupará a segunda posição na foto; quatro, porque um dos membros da família já está colocado na primeira posição - sobram 4 cartinhas).

O professor deve seguir com os questionamentos até que todos os alunos tenham entendido o processo. Por fim, a pergunta:

- Quantas são as maneiras distintas de tomar a última decisão, isto é, posicionar o último membro da família na 5ª posição da fotografia? (uma).

- Pode-se usar o PFC para resolver o problema: para ocupar a primeira posição na foto o fotógrafo pode escolher entre cinco pessoas (elementos), para ocupar a segunda posição a escolha se dará entre quatro pessoas, pois aquela que já ocupa a primeira posição não pode ocupar mais de um lugar ao mesmo tempo, e assim sucessivamente até a quinta e última posição para a qual restará apenas uma pessoa. Portanto, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, *ou seja,* $5!$ *determina a quantidade de poses distintas que essa família de cinco pessoas pode registrar.*

É interessante distribuir, inicialmente, a quantidade de cartinhas correspondentes às pessoas que o problema sugere e após serem contabilizadas todas as poses possíveis para as fotos, aumentar gradativamente o número de membros para que os alunos refaçam as fotos com essas novas pessoas. Além disso, sugere-se dar aos grupos de alunos quantidades diferentes de cartinhas para que não busquem a resposta com o grupo vizinho e que cada grupo determine sua estratégia para depois apresentá-la aos demais.

Após os grupos resolverem todas as situações propostas, é pertinente sugerir variações do problema. Por exemplo, dois dos membros da família devem permanecer sempre juntos na fotografia. Pode-se ainda considerar as duas situações: quando as pessoas ficam juntas e na mesma ordem e quando as pessoas ficam apenas juntas, independente da ordem.

- A família resolveu tirar novas fotos, só que agora duas pessoas da família devem permanecer sempre juntas. As novas fotos terão as mesmas poses tiradas anteriormente? (Algumas, porém devem-se excluir aquelas em que as duas pessoas estão separadas, pois o problema pede que não se

posicione pessoas entre elas).

Quando se considera que duas pessoas (elementos) permaneçam juntas e na mesma ordem pode-se considerar que estas são uma única pessoa e realizar a permutação de $n-1$ elementos. Quando se considera que duas pessoas permaneçam apenas juntas, independente da ordem, pode-se considerar que estas são uma única pessoa e realizar a permutação de $n-1$ elementos e posteriormente multiplicar o resultado por 2!, pois devemos considerar que as pessoas que permanecem juntas podem permutar entre elas, ocupando uma o lugar da outra. Logo, para cada disposição do restante da família, as duas pessoas que permanecem juntas podem se dispor de duas (fatorial de dois) formas diferentes.

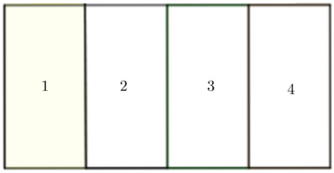
Outra situação relevante de propor com este mesmo material é que em uma família de cinco pessoas, por exemplo, sejam escolhidas três delas para a foto. É possível explorar outras variações dessa nessa proposta.

Proposta 3: Para trabalhar com permutação de elementos repetidos propõem-se a seguinte atividade.

Apresenta-se o problema: Raul desenhou uma bandeira listrada, conforme a Figura 3, e usará as cores verde, amarela e marrom para pintá-la. Ele pretende pintar todas as listras e utilizar todas as cores que possui, mas percebe que em sua bandeira há quatro listras e ele possui apenas três cores diferentes. Raul decide, então, usar em duas das listras da bandeira a cor verde, pois esta é sua cor preferida, não importando se as listras são adjacentes ou não.

Disponibilizar os materiais aos alunos: Imagem da bandeira e lápis de cor nas cores verde, amarela e marrom.

Figura 3: Bandeira desenhada por Raul.



Realizar as seguintes perguntas e instruções:

- Como Raul irá usar todas as cores, ele começa pela cor marrom para pintar uma das listras. A primeira decisão que ele tem a tomar é escolher qual listra pintará com a cor marrom. Quantas são as opções para essa primeira decisão? (4).

- Escolha por Raul e pinte uma listra de marrom.

- Com a cor amarela, Raul irá tomar a segunda decisão, que é escolher qual listra pintará com a cor amarela. Quantas são as opções para essa segunda decisão? (3).

- Escolha por Raul e pinte uma listra de amarelo.

- Quantas listras restaram para Raul pintar? (2).

- Quantas cores restaram? (1).

- A terceira decisão consiste em Raul escolher as duas listras para pintar com sua cor preferida. De quantas maneiras ele pode tomar esta decisão? Por quê? (apenas uma, pois restam apenas duas listras e essas duas listras serão pintadas na cor verde).

- Escolha por Raul e pinte as duas listras de verde.

- Pelo princípio fundamental da contagem de quantas maneiras Raul pode tomar a primeira, segunda e terceira decisão sucessivamente?

($4 \cdot 3 \cdot 1 \; = 12$ maneiras).

Essa maneira de resolver o problema é mais simples, pois ao deixar a cor que repete para ser usada por último faz com que só exista uma maneira de pintar as duas listras restantes. Mas o aluno pode querer pintar a bandeira começando pela cor que repete. Portanto, é interessante encaminhar a atividade a essa outra interpretação.

- Raul não gostou como você escolheu pintar a bandeira. Ele acha melhor começar agora pintando com sua cor preferida. Portanto, a primeira decisão (D_1) *a ser tomada por Raul é escolher uma das listras para pintar com a cor verde. De quantas maneiras ele pode tomar essa decisão? (4).*

- Escolha por Raul e pinte uma listra de verde.

- Ainda com a cor verde, Raul deve tomar a segunda decisão (D_2) *que é escolher uma das listras para pintar. De quantas maneiras ele pode tomar essa segunda decisão? (3).*

- Escolha por Raul e pinte uma listra de verde.

- Com a cor amarela, Raul deve tomar a terceira decisão (D_3) *que é escolher uma listra para pintar. Quantas são as maneiras que ele pode tomar essa decisão? (2).*

- Escolha por Raul e pinte uma listra de amarela.

- Com a cor marrom, Raul deve tomar a quarta e última decisão (D_4) *que é escolher uma listra para pintar. Quantas são as maneiras que ele pode tomar essa decisão? (1).*

- Pelo princípio fundamental da contagem, quantas são as maneiras distintas de tomar a primeira, segunda, terceira e quarta decisão sucessivamente? $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24)$.

- Observe que se na primeira decisão (D_1) *Raul escolheu a listra 2 e na segunda decisão* (D_2) *escolher a listra 3 é o mesmo que escolher na primeira decisão a listra 3 e na segunda decisão a listra 2.* Conforme as Figuras 5 – a, b.

Figura 4: Uma das maneiras de colorir a bandeira

Figura 4 - a: D_1 – listra 2 pintada de verde e D_2- listra 3 pintada de verde.

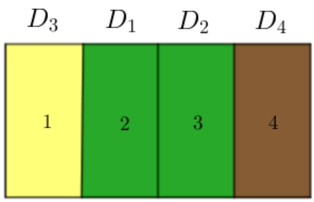
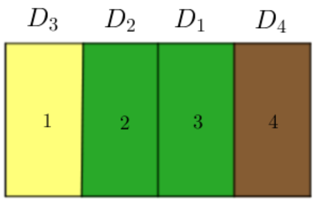


Figura 4 - b: D_1 – listra 3 pintada de verde e D_2- listra 2 pintada de verde.



- Essas bandeiras são iguais? (sim).

- Se para cada bandeira diferente existe outra bandeira pintada igual, o que é preciso fazer para achar quantas bandeiras distintas podem ser obtidas com as decisões tomadas? Por quê?

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (dividir o produto por 2!, pois se cada bandeira diferente existe outra exatamente igual é preciso dividir por 2 para descontar essa repetição de bandeiras iguais).

Observe que é importante não começar pela cor que irá repetir, pois fica mais fácil para o aluno entender que, restando apenas a cor que irá repetir, e duas listras a serem pintadas, ele terá apenas uma forma de pintar as listras.

Após serem resolvidos diversos problemas de contagem utilizando o PFC, sugere-se que sejam deduzidas as fórmulas de agrupamento, observando que apenas as fórmulas por si só não são suficientes para resolver um problema de contagem e que devem ser desenvolvidas algumas estratégias de resolução.

Considerações Finais

A análise Combinatória é uma ampla parte da matemática, que estuda e analisa estruturas e relações discretas (MORGADO, 2006, p. 1). Os problemas de contagem são amplos, diversos e não se resumem a uma maneira única de resolvê-los. É necessário desenvolver técnicas, estratégias e raciocínio lógico. Para tanto, propomos que o ensino e a aprendizagem da matemática não aconteçam de forma mecânica, na qual o aluno reproduz as informações divulgadas pelo professor.

É preciso que professor e alunos saiam de suas zonas de conforto, professor sendo pesquisador, ativo, buscando maneiras diferentes de ensinar (BECKER, 2007) e o aluno investigando, aprendendo efetivamente, buscando soluções e criando estratégias para resolver problemas.

Portanto, consideramos que este trabalho pode auxiliar docentes da área a planejar e realizar suas práticas de ensino de análise combinatória de maneira que o aluno compreenda as situações e seja capaz de utilizar as estratégias e técnicas desenvolvidas nos problemas de contagem.

Referências

BECKER, Fernando. Ensino e pesquisa: Qual a relação? In: BECKER, Fernando; MARQUES, Tania (orgs.). **Ser professor é ser pesquisador**. Porto Alegre: Mediação, 2007. p.11-20.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília. 2017.

BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações Educacio-**

nais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Oslvado; DEGENSZAJN, David. **Matemática**: Volume único. 4. ed. São Paulo: Atual Editora, 2007.

LIMA, E. L. *et al*. A **Matemática do Ensino Médio**: Volume 2. 7. ed. São Paulo: SBM, 2016.

MORGADO, A. C. O. et al. **Análise combinatória e Probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM. 20

Autoras e Autores

Anna Tereza Rempel Chollet - Graduanda do curso de Licenciatura em Letras do Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Osório.

Ednei Luís Becher – Doutor em Ensino de Ciências e Matemática e professor do Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Osório.

Fabiana Gerusa Leindeker da Silva – Mestre em Matemática e professora do Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Osório.

Jenifer Cassandra da Silva Oliveira - Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal do Rio Grande dos Sul - Campus Osório e mestranda em Matemática Aplicada pela UFRGS.

Leonardo Pospichil Lima Neto - Graduando do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Osório.

Liliani de Souza Pereira – Mestre em Educação e professora da rede estadual de ensino do estado de Santa Catarina.

Lisandro Bitencourt Machado – Mestre em Ensino de Ciência e Matemática e professor do Instituto Federal do rio Grande do Sul – Campus Osório.

Mariana Nunes Barato – Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal do Rio Grande do Sul - Campus Osório.

Monalisa da Silva - Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal do Rio Grande do Sul - Campus Osório.

Rafaela Fetzner Drey – Doutora em Linguística Aplicada e professora do Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Osório.

Tamires Bon Vieira – Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Osório.