projeto

PRÁTICAS INVESTIGATIVAS PARA A VERDADE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Aline Silva De Bona
Bruno Ferreira da Luz
Fernando Rodrigues de Oliveira
Guilherme Ferreira Monteiro
Jenifer Cassandra da Silva Oliveira

projeto

PRÁTICAS INVESTIGATIVAS PARA A VERDADE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Aline Silva De Bona
Bruno Ferreira da Luz
Fernando Rodrigues de Oliveira
Guilherme Ferreira Monteiro
Jenifer Cassandra da Silva Oliveira

INSTITUTO FEDERAL
Rio Grande do Sul
Campus Osório

Essa obra é resultado de um projeto de pesquisa do IFRS - Campus Osório, realizada por intermédio de fomento do IFRS edital 36/2020 Apoio à Publicação.

LF EDITORIAL
Editora Livraria da Física
São Paulo
2020

Editor: José Roberto Marinho
Editoração Eletrônica: Edi Carlos Pereira de Sousa
Capa: Edi Carlos Pereira de Sousa

Texto em conformidade com as novas regras ortográficas do Acordo da Língua Portuguesa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Projeto: "práticas investigativas para a verdade matemática no ensino médio" / Aline Silva De Bona ... [et al.]. – 1. ed. – São Paulo: Livraria da Física, 2020.

Outros autores: Bruno Ferreira da Luz, Fernando Rodrigues de Oliveira, Guilherme Ferreira Monteiro, Jenifer Cassandra da Silva Oliveira

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-029-9

1. Educação 2. Educação - Finalidades e objetivos 3. Inovações educacionais 4. Matemática (Ensino médio) 5. Professores - Formação I. De Bona, Aline Silva. II. Luz, Bruno Ferreira da. III. Oliveira, Fernando Rodrigues de. IV. Monteiro, Guilherme Ferreira. V. Oliveira, Jenifer Cassandra da Silva

20-47433 CDD–510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática: Ensino médio 510.7

Maria Alice Ferreira – Bibliotecária – CRB-8/7964

ISBN: 978-65-5563-029-9

Impresso no Brasil • *Printed in Brazil*

LF EDITORIAL

Editora Livraria da Física
Tel./Fax: +55 11 3459-4327 / 3936-3413
www.livrariadafísica.com.br

Conselho Editorial

SUMÁRIO

1. Introdução

ESSE material faz parte de uma pesquisa realizada por professores e alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus* Osório.

Essa pesquisa está vinculada ao projeto "Práticas Investigativas para a Verdade Matemática no Ensino Médio", que foi iniciado em 2020 e possui como objetivos principais compreender e analisar possibilidades de incluir demonstrações e provas matemáticas nas aulas da Educação Básica, sobretudo no Ensino Médio.

Reconhecemos que há uma necessidade de incluir demonstrações nos níveis fundamental e médio pois, segundo Soares, Nascimento Afro, Brito e Souza (2012, p. 2), muitos estudantes têm o primeiro contato com as demonstrações e provas matemáticas somente nos cursos superiores de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática.

Entendemos que a exploração das demonstrações na educação básica é positiva, tendo em vista que possibilita que os alunos compreendam a matemática como uma construção humana dedutiva e indutiva, e não como mera decoração e aplicação de fórmulas que, em muitos casos, são reproduzidas de forma estritamente mecânica (JUNIOR, NASSER, 2014).

Destaca-se ainda que esse material não tem por objetivo conduzir os leitores e docentes da Educação Básica a abandonarem abordagens que envolvem as verificações empíricas, pois até mesmo no processo demonstrativo elas desempenham papéis importantes, como por exemplo, dando possibilidades para produção de conjecturas e ampliação do grau de compreensão dos conceitos envolvidos (BRASIL, 1998, p. 87).

Dessa forma, esse material tem o intuito de mostrar/apresentar possibilidades de demonstrar propriedades matemáticas a partir de conceitos que estão previstos para o Ensino Básico, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018).

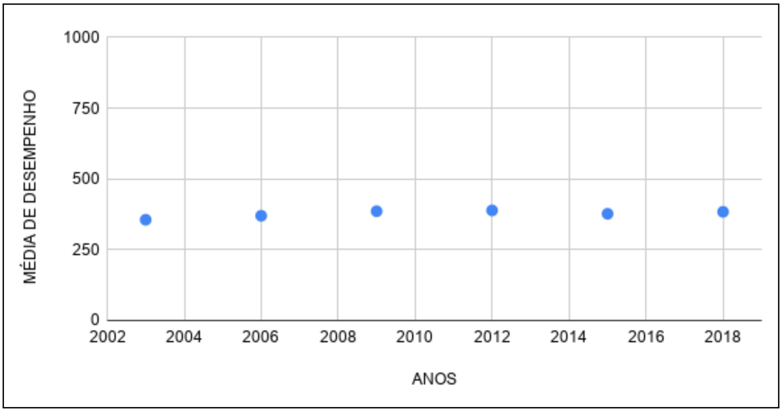
2. Da necessidade de buscar novas práticas de ensino na Educação Básica às demonstrações matemáticas

A disciplina de Matemática é cercada de tabus que corroboram para que o desempenho dos alunos brasileiros seja insuficiente nessa área. Esse fato fica evidente, por exemplo, em avaliações externas como as do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), que é realizado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). De acordo com o PISA de 2018, cerca de 68,1% dos estudantes brasileiros de 15 anos apresentam proficiência em matemática Nível 1 ou abaixo de 1, o que é um dado extremamente alarmante pois, segundo a OCDE (2019, *apud* BRASIL, 2019),

> [...] atingir pelo menos o Nível 2 é particularmente importante, uma vez que este é considerado o nível básico de proficiência que se espera de todos os jovens, a fim de que possam tirar proveito de novas oportunidades de aprendizagem e participar plenamente da vida social, econômica e cívica da sociedade [...] (BRASIL, 2019).

Esse desempenho abaixo do considerado como mínimo necessário para que os estudantes possam participar de forma mais ativa e crítica no contexto que estão inseridos vem se repetindo nas últimas edições do PISA. Nas últimas edições dessa avalição, constatou-se que a média de desempenho em Matemática dos estudantes brasileiros, apesar de oscilar, encontra-se no Nível 1, como pode ser visualizado no Gráfico 1.

Gráfico 1 – Média de desempenho dos estudantes brasileiros em Matemática no PISA



Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos dados do PISA (BRASIL, 2019, p. 107).

A fim de mudar esse cenário e possibilitar que os alunos tenham aprendizagens matemáticas mais sólidas, surge a necessidade de reflexões quanto à prática docente. Uma das sugestões da OCDE consiste na exploração de metodologias em que os alunos desempenhem papéis mais ativos na aprendizagem matemática (OCDE, 2018). É diante desse cenário que as demonstrações podem surgir, aliadas às estratégias de ensino, para auxiliar os alunos a construírem aprendizagens mais consistentes.

Isso não significa que as abordagens empíricas devam ser abolidas das aulas de matemática, afinal, segundo os PCNs (1998, p. 24), as situações do dia a dia são fundamentais para empregar significados aos conceitos estudados. No entanto, é importante que esses significados sejam ampliados e explorados, por exemplo, a partir de problemas internos da Matemática e de problemas históricos. Os PCNs (BRASIL, 1998) ainda alertam sobre a exclusão de tópicos matemáticos se levarmos estritamente em consideração que os conceitos a serem estudados devam ser aplicáveis ao cotidiano dos estudantes.

> [...] muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata (BRASIL, 1998, p. 24).

Propor que os alunos compreendam e desenvolvam demonstrações contribui, em primeira instância, para o desenvolvimento da argumentação e justificação das ideias (LIMA; LINS, 2015, p. 2), capacidades estas que devem ser desenvolvidas ao longo dos anos escolares (BRASIL, 1998, p. 49 e 70).

Além da evidente contribuição de validar/comprovar sentenças matemáticas, De Villiers (2002) apresenta outras seis funcionalidades da aprendizagem de demonstrações, que são: verificação e convencimento sobre a veracidade das afirmações; compreensão dos porquês as sentenças são válidas; descoberta de conceitos e resultados no processo de demonstrar uma conjectura; estabelecimento de relações entre os objetos matemáticos; satisfação pessoal por ter conseguido demonstrar uma sentença matemática; e organização e sistematização dos resultados obtidos.

Dessa forma, as demonstrações matemáticas desempenham papéis que vão além de comprovar e validar a utilização de fórmulas, técnicas e procedimentos matemáticos, pois são capazes de trazer maior significado para a aprendizagem de Matemática, uma vez que possibilitam que os alunos construam, de forma gradativa, seus próprios processos de argumentação lógica que podem levá-los a elaborarem justificativas para as sentenças matemáticas e, consequentemente, a uma aprendizagem mais ampla dos conceitos matemáticos (LIMA; LINS, 2015).

Segundo Pietropaolo (2005), os currículos dos níveis de ensino que são equivalentes ao Ensino Fundamental no Brasil de países como França, Alemanha, Inglaterra e Portugal preveem que as demonstrações e provas matemáticas sejam exploradas nas aulas de Matemática, pois as consideram importantes e fundamentais para a compreensão de conceitos matemáticos.

No Brasil, os documentos oficiais do Ministério da Educação (MEC) fazem referência às demonstrações matemáticas em vários anos do Ensino Básico. Os PCNs da Matemática, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p. 26), enfatizam que as demonstrações formais são a única maneira de validar/comprovar os conhecimentos matemáticos, o que torna a Matemática uma ciência não empírica.

Para que sejam desenvolvidas as demonstrações em sala de aula, faz-se necessário que sejam desenvolvidos, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, princípios lógicos integrados aos conteúdos, pois isso possibilitará a compreensão dos processos matemáticos envolvidos nas demonstrações (BRASIL, 1998, p. 49).

Desta forma, os PCNs (BRASIL, 1998) destacam a capacidade argumentativa como sendo um desses princípios lógicos que estão intimamente relacionados com a realização de demonstrações (BRASIL, 1998, p. 70). Esse documento prevê que a argumentação seja utilizada, no terceiro ciclo (6º e 7º anos), para “construir e analisar diferentes processos de resolução de situações-problema e compará-los” (BRASIL, 1998, p. 70) e para defender diferentes pontos de vista, evoluindo, no quarto ciclo (8º e 9º anos) para caminhos que conduzem às demonstrações (BRASIL, 1998, p. 70).

> Assim, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas (BRASIL, 1998, p. 71).

Na BNCC (BRASIL, 2018), a ênfase nas demonstrações é dada nos últimos anos do ensino fundamental, o que está em consonância ao previsto/orientado nos PCNs (BRASIL, 1998, p. 70).

Embora as demonstrações não sejam mencionadas de forma explícita na BNCC (2018) do 1º ao 7º ano do Ensino Fundamental, esse documento prevê que habilidades relacionadas a argumentações e justificações mais simples devam ser desenvolvidas desde os primeiros anos escolares (BRASIL, 2018), habilidades estas que são importantes para a realização de demonstrações.

Dessa forma, para que as demonstrações sejam incluídas de forma adequada nas aulas de matemática, a fim de não exigir demasiadamente dos alunos, faz-se necessário compreendermos que a argumentação lógico-dedutiva deve ser desenvolvida no decorrer dos anos escolares, com atividades que exijam um aprimoramento gradual da capacidade argumentativa, possibilitando que os estudantes consigam formular argumentos que sejam aceitos como demonstrações matemáticas (LIMA; LINS, 2015, p. 2).

3. Mas o que significa "demonstrar"?

AO CONSULTAR um dicionário on-line de língua portuguesa encontramos que as palavras demonstração e prova são definidas de maneira muito similar:

> Demonstração: Ato ou efeito de demonstrar. Qualquer recurso capaz de atestar a veracidade ou a autenticidade de alguma coisa; prova. Raciocínio que torna evidente o caráter verídico de uma proposição, ideia ou teoria (DEMONSTRAÇÃO, 2020, on-line).
>
> Prova: aquilo que demonstra que uma afirmação ou um fato são verdadeiros; evidência, comprovação. Ato que dá uma demonstração cabal (de afeto, fidelidade etc.); manifestação, sinal; experiência científica; demonstração, experimento (PROVA, 2020, on-line).

Entretanto, em algumas áreas da Matemática, especialmente na Pura e Aplicada, esses termos podem ser usados como conceitos distintos e por isso há pesquisadores que diferenciam o conceito de provas e demonstrações em seus trabalhos. Carvalho (2004), por exemplo, cita a diferenciação feita por Balacheff entre explicação, prova e demonstração na Matemática.

> Explicação é o termo adotado para um discurso, através da fala, visando produzir de forma clara a característica de veracidade, adquirida pelo locutor, de uma proposição ou de um resultado. [...] Prova é o termo utilizado para uma explicação aceita em uma dada comunidade em um dado momento. [...] podem ser aceitas como provas explicações que adotam uma forma particular: um conjunto organizado de enunciados válidos seguindo regras determinadas. Um enunciado, por sua vez, ou é reconhecido como verdadeiro ou é deduzido de uma verdade precedente por um conjunto de regras de dedução bem definido e pré-fixado. A este tipo particular de prova, chama Demonstração (BALACHEFF, 1987 *apud* CARVALHO, 2004, p. 43).

Nesse material adotaremos que as provas e as demonstrações são conceitos sinônimos, pois, segundo Pietropaolo (2005, p. 49), quando uma prova é aceita por uma comunidade Matemática e adquire o status de rigorosa, pode ser classificada como uma demonstração. Desta forma, adotaremos a definição de Júnior e Nasser (2012):

> Provar um resultado matemático é validar a declaração feita, a partir de hipóteses verificadas e certificadas como verdadeiras. Ensinar por meio de uma prova consiste em mostrar ao educando a validade da declaração feita, exibindo as etapas do processo dedutivo, para assim desenvolver no educando o raciocínio lógico-dedutivo (JÚNIOR; NASSER, 2012, p. 136).

A seguir, serão apresentados três tipos de provas citadas por Júnior e Nasser (2012) que foram identificadas em uma pesquisa realizada por Sowder e Harel (1998 *apud* JÚNIOR; NASSER, 2012, p. 136) com alunos dos Estados Unidos:

> O *esquema de prova baseado em elementos externos* se caracteriza por "tanto o que convence o estudante e aquilo que poderia persuadir a outros" (p. 671). Já o *esquema de prova empírico* é descrito como aquele em que "justificações são feitas exclusivamente com base em exemplos" (p. 672). Quanto ao *esquema de prova analítico*, os pesquisadores destacam que, se houvesse uma escala de nível de rigor de justificações, os professores de matemática considerariam este esquema como o mais elevado tipo de prova (p. 673) (JÚNIOR, NASSER, 2012, p. 136, grifo nosso).

A fim de tornar possível o ensino e a aprendizagem de demonstrações, nos quais os professores abandonam posturas de somente apresentar e informar os resultados matemáticos e os alunos deixam de acumular e utilizar essas informações sem compreender as justificativas que as validam (JUNIOR; NASSER, 2014), acreditamos que os três tipos de provas listados anteriormente podem ser utilizados para auxiliar os professores de Matemática a desenvolverem atividades que insiram as demonstrações na sala de aula, sendo que esse processo pode ser iniciado com as demonstrações que pertencem ao esquema de prova baseado em elementos externos, evoluindo para as demonstrações que pertencem ao esquema de prova empírico, e, finalmente, avançando para as demonstrações que pertencem ao esquema de prova analítico.

4. Demonstrações utilizando conceitos matemáticos do Ensino Básico

NESSA seção serão apresentadas demonstrações que foram elaboradas pelos autores. Essas demonstrações utilizam, essencialmente, conceitos matemáticos previstos para o ensino básico, segundo os documentos oficiais do MEC.

No tópico 4.1 serão apresentadas duas demonstrações sobre propriedades de potenciação. A potenciação é um dos objetos de conhecimentos previstos na BNCC (2018) e faz parte da unidade temática Números, sendo que seu estudo deve inciar no sexto ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018, p. 300).

No tópico 4.2 são apresentadas quatro demonstrações sobre geometria plana, geometria espacial e geometra analítica. A Geometria é uma das cinco unidades temáticas da BNCC (2018) para a Matemática, sendo que alguns dos conceitos que serão utilizados nas demonstrações, tais como associação dos vértices de um polígono a pares ordenados perperndicularismo de retas, paralelismo de retas e figuras semelhantes, são objetos de conhecimento que estão previstos nesse documento desde o sexto ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018, p. 302).

No tópico 4.3 são apresentadas duas demonstrações que envolvem diretamente a definição de máximo divisor comum entre dois números inteiros. A BNCC (2018) prevê que o estudo de múltiplos e divisores nos números naturais deva iniciar no sexto do Ensino Fundamental, sendo que o conceito de máximo divisor comum também deve ser explorado (BRASIL, 2018, p. 306-307).

No tópico 4.4 são apresentadas duas demonstrações que envolvem conceitos de funções. Na BNCC (2018), as funções são objetos de conhecimento que fazem parte da unidade temática Álgebra, sendo que segundo esse documento o estudo desse tema deve iniciar no 9ª ano do Ensino Fundamental e estender-se ao longo do Ensino Médio (BRASIL, 2018, p. 316 e 533-545).

No tópico 4.5 é apresentada uma demonstração que envolve noções de conjuntos e finitude. A noção de conjuntos deve começar a ser explorada já nos anos iniciais do ensino fundamental (BRASIL, 2018, p. 278-279).

No tópico 4.6 são apresentadas duas demonstrações que envolvem propriedades e regularidades dos números naturais.

A maior parte dos conceitos que serão utilizados nas demonstrações que seguem devem ser explorados a partir do Ensino Fundamental e ampliados ao longo dos demais anos e níveis de ensino, segundo a BNCC (BRASIL, 2018). No entanto, devido à necessidade de, em algumas demonstrações, utilizarmos notações que demandam dos estudantes um amadurecimento algébrico mais sólido, recomenda-se que estas sejam exploradas no nível médio.

4.1 Propriedades de potências: produtos e divisões entre números de mesma base

4.1.1 Multiplicação de potências de mesma base nos números reais

Enunciado 4.1.1: Mostre que na multiplicação de potências de mesma base, quando a base for um número real diferente de zero e os expoentes números naturais, conserva-se a base e soma-se os expoentes.

Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.1.1: Para solucionar a questão, utilizaremos essencialmente manipulações algébricas e a técnica de demonstração primeiro Principio da Indução Finita (PIF).

Demonstração 4.1.1: Inicialmente, vamos considerar dois números da forma a^m e a^n, com $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$. ; e $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar que na multiplicação de potências de mesma base, quando a base for um número real diferente de zero e os expoentes números naturais, conserva-se a base e soma-se os expoentes. Isso significa mostrar que a igualdade $a^m.a^n = a^{(m+n)}$ é verdaderia.

Mas antes disso, iremos mostrar que $a^m.\ a^1 = a^{(m+1)}$. Utilizando PIF, com indução sobre m, perceba que quando $m = 1$ a igualdade $a^m.\ a^1 = a^{(m+1)}$ é válida, pois $a^1.\ a^1 = a^2 = a^{(1+1)}$. Agora, vamos supor que a igualdade $a^m.\ a^1 = a^{(m+1)}$ é válida. A mostrar que $(a^m.\ a^1)\ .\ a^1 = a^{(m+1)}.\ a^1 = a^{((m+1)+1)}$ é válida. Assim, segue que

$(a^m.\ a^1).\ a^1 = a^{(m+1)}.\ a^1$, pois por hipótese $a^m.\ a^1 = a^{(m+1)}$

Considerando que m+1=k , sendo $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$., pois a soma de dois números naturais resulta em um número natural, segue:

$a^{(m+1)}.\ a^1 = a^{(k)}.\ a^1 \implies a^{(k)}.\ a^1 = a^{(k)+1}$, pois por hipótese $a^k.\ a^1 = a^{(k+1)}$.

Note que $a^{(k)+1} = a^{((m+1)+1)}$. Portanto, a partir das igualdades acima, mostramos que $(a^m.\ a^1)\ .\ a^1 = a^{(m+1)}.\ a^1 = a^{((m+1)+1)}$ é válida.

Logo, a igualdade $a^m.\ a^1 = a^{m+1)}$ é válida.

Agora, vamos mostrar que a igualdade $a^m.\ a^n = a^{(m+n)}$ é verdaderia, utilizando o PIF, com indução sobre n. Note que quando n= 1, a igualdade é válida, pois $a^m.\ a^1 = a^{(m+1)}$, conforme mostrado anteriormente.

Vamos supor que a igualdade $a^m.\ a^n = a^{(m+n)}$ é verdaderia. A mostrar que $a^m.\ a^{(n+1)} = a^{(m+(n+1))}$ é verdaderia. Assim, segue que

$a^m.\ a^{(n+1)} = a^m.\ (a^n.\ a^1)$, pois $a^{(n+1)} = a^n.\ a^1$
$\Longrightarrow a^m.\ (a^n.\ a^1) = (a^m.\ a^n).\ a^1$, pois a associatividade do produto é válida em operações com números reais
$\Longrightarrow (a^m.\ a^n).\ a^1 = a^{(m+n)}.\ a^1$, pois por hipótese $a^m.\ a^n = a^{(m+n)}$
$\Longrightarrow a^{(m+n)}.\ a^1 = a^{(j)}.\ a^1$, onde m+n= j e j é um número natural
$\Longrightarrow a^{(j)}.\ a^1 = a^{(j+1)}$, conforme mostrado inicialmente
$\Longrightarrow a^{(j+1)} = a^{((m+n)+1)}$, pois definimos que j= m+n
$\Longrightarrow a^{((m+n)+1)} = a^{(m+(n+1))}$, pois a associatividade da soma é válida em operações com números naturais.

A partir das implicações acima, mostramos que $a^m.\ a^{(n+1)} = a^{(m+(n+1))}$ é verdaderia. Logo, temos que a igualdade $a^m.\ a^n = a^{(m+n)}$ é verdadeira, quando **a** é um número diferente de zero e real; e **m**, **n** são números naturais.

4.1.2 Divisão de potências de mesma base nos números reais

Enunciado 4.1.2: Mostre que na divisão de potências de mesma base, quando a base for um número real diferente de zero e os expoentes números naturais, conserva-se a base e subtrai-se os expoentes.

Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.1.2 : Para solucionar a questão exposta, utilizaremos essencialmente as manipulações algébricas, a propriedade de multiplicação de potências de mesma base nos números reais e a técnica de demonstração primeiro Principio da Indução Finita (PIF).

Demonstração 4.1.2: Inicialmente, vamos considerar dois números da forma a^m e a^n, com **a** sendo um número diferente de zero e real; e **m**, **n** $\in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar que na divisão de potências de mesma base, quando a base for um número real diferente de zero e os expoentes números naturais, conserva-se a base e subtrai-se os expoentes. Isso significa mostrar que a igualdade $a^m : a^n = a^{(m-n)}$ é verdaderia.

Mas antes disso, iremos mostrar que $a^m{:}a^1 = a^{(m-1)}$. Utilizando PIF, com indução sobre m, perceba que quando $m = 1$ a igualdade $a^m\colon a^1 = a^{(m-1)}$ é válida, pois $a^1\colon a^1 = 1 = a^0 = a^{(1-1)}$. Agora, vamos supor que a igualdade $a^m\colon a^1 = a^{(m-1)}$ é válida. A mostrar que $a^{(m+1)}\colon a^1 = a^{((m+1)-1)}$ é válida. Assim, segue que

$$
\begin{aligned}
&a^{(m+1)}\colon a^1 = \frac{a^{(m+1)}}{a^1}\\
&\Longrightarrow \frac{a^{(m+1)}}{a^1} = \frac{a^m.a^1}{a^1}, \text{ pois } a^{(m+1)} = a^m.a^1\\
&\Longrightarrow \frac{a^m.a^1}{a^1} = \left(\frac{a^m}{a^1}\right).(a^1)\\
&\Longrightarrow \left(\frac{a^m}{a^1}\right).(a^1) = (a^m : a^1).(a^1)\\
&\Longrightarrow (a^m : a^1).(a^1) = a^{(m-1)}.(a^1), \text{ pois por hipótese } a^m : a^1 = a^{(m-1)}\\
&\Longrightarrow a^{(m-1)}.(a^1) = a^{((m-1)+1)},
\end{aligned}
$$

pois na multiplicação de potências de mesma base conserva-se a base e soma-se os expoentes

$$\Longrightarrow a^{((m-1)+1)} = a^{((m+1)-1)},$$

pois a comutatividade da soma e a associatividade da soma são válidas nos números naturais.

Assim, mostramos que a igualdade $a^{(m+1)}\colon a^1 = a^{((m+1)-1)}$ é válida. Logo, a igualdade $a^m\colon a^1 = a^{(m-1)}$ é válida quando $\mathbf{m} \in \mathbb{N}$.

Agora, vamos mostrar que a igualdade $a^m\colon a^n = a^{(m-n)}$ é verdaderia, utilizando o PIF, com indução sobre n. Note que quando n= 1 a igualdade é válida, pois $a^m\colon a^1 = a^{(m-1)}$, conforme mostrado anteriormente.

Vamos supor que a igualdade $a^m\colon a^n = a^{(m-n)}$ é verdadeira. A mostrar que $a^m\colon a^{(n+1)} = a^{(m-(n+1))}$ é verdadeira. Assim, segue que

$$a^m\colon a^{(n+1)} = \frac{a^{(m)}}{a^{(n+1)}}$$
$$\implies \frac{a^{(m)}}{a^{(n+1)}} = \frac{a^{(m)}}{a^n.a^1}, \text{ pois } a^{(n+1)} = a^n.a^1$$
$$\implies \left(\frac{a^m}{a^n}\right).\frac{1}{a^1} = (a^{(m-n)}).\left(\frac{1}{a^1}\right), \text{ pois por hipótese } a^m\colon a^n = a^{(m-n)}$$
$$\implies a^{(m-n)}).\left(\frac{1}{a^1}\right) = a^{(m-n)}).(a^{(-1)})$$
$$\implies a^{(m-n)}).(a^{(-1)}) = a^{((m-n)+(-1))}),$$ pois na na multiplicação de potências de mesma base conserva-se a base e soma-se os expoentes
$$\implies a^{((m-n)+(-1))}) = a^{((m-(n+1))}),$$ pois ((m - n)+(-1)= (m -(n+1)).

A partir das implicações acima, mostramos que $a^m\colon a^{(n+1)} = a^{(m-(n+1))}$ é verdadeira. Logo, temos que a igualdade $a^m\colon a^n = a^{(m-n)}$ é verdaderia quando **a** é um número diferente de zero e real; e **m**, **n** são números naturais.

4.2 Geometria plana, geometria espacial e geometria analítica

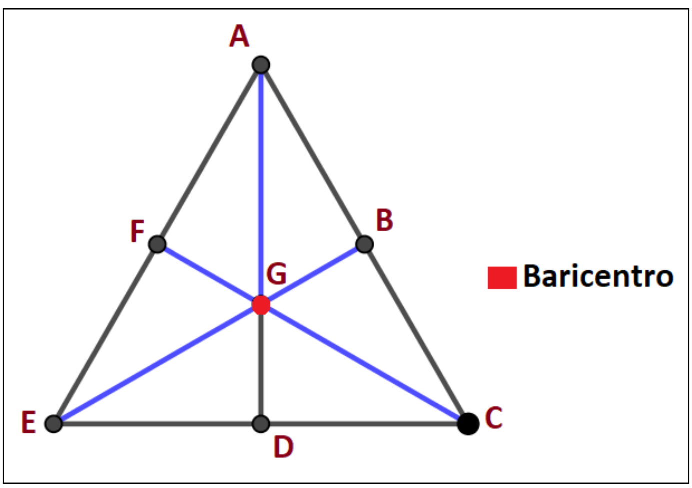
4.2.1 Baricentro de um triângulo equilátero de lado "a"

Enunciado 4.2.1: Mostre que o baricentro de um triângulo equilátero de lado "**a**" divide a altura desse triângulo em uma proporção de 2 para 1.

Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.2.1 : Para solucionar a questão, utilizaremos essencialmente as relações trigonométricas em triângulos retângulos, os conceitos de baricentro e os conceitos de mediana.

Demonstração 4.2.1: Inicialmente, devemos localizar o baricentro de um triângulo equilátero de lado **a**. Para isso, devemos lembrar que o baricentro é determinado pelo ponto de encontro das medianas do triângulo (Figura 1).

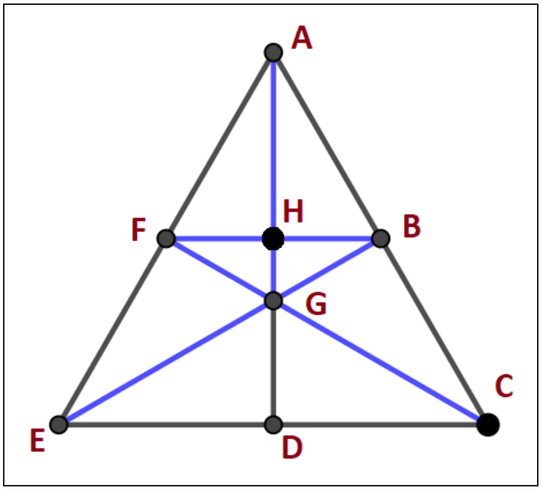
Figura 1 – Baricentro de um triângulo equilátero de lado "a"



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

Note que na Figura 1 o baricentro está representado pelo ponto G. Ainda, iremos traçar um segmento de reta que inicia no ponto F e termina no ponto B. Note que esse segmento $\overline{BF}$ é paralelo ao segmento $\overline{CE}$ e é perpendicular ao segmento $\overline{AD}$ (Figura 2).

Figura 2 – Traçando o segmento $\overline{BF}$



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

Após essas construções e observações iniciais, lembre-se que o nosso objetivo é determinar a altura do triângulo de lados **a** e comparar com a proporção dos segmentos formados pela união de cada vértice do triângulo com o baricentro. Para isso, note que a altura do triângulo equilátero é expresso pelos segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, e $\overline{CF}$, pois a medida das medianas de triângulos equiláteros coincidem com a medida de sua altura. Portanto, podemos escolher qualquer um desses segmentos para determinar a altura do triângulo. Escolheremos o segmento $\overline{AD}$. Ainda, podemos comparar se há uma proporção de dois para um entre os segmentos $\overline{AG}$ e $\overline{DG}$, $\overline{CG}$ e $\overline{FG}$, ou $\overline{EG}$ e $\overline{BG}$. Escolheremos comparar os segmentos $\overline{AG}$ e $\overline{DG}$, pois para os demais casos a comparação, além de ser análoga, é equivalente.

Para determinar a medida de $\overline{AD}$ iremos considerar o triângulo retângulo ADE, que é reto em $A\hat{D}E$. Perceba que $A\hat{E}D = \dfrac{\pi}{3}$ radianos, por isso, utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo ADE, teremos:

$sen\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{AD}{AE} \implies \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{AD}{a} \implies AD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ unidade de comprimento.

Na linha acima, na primeira igualdade, utilizamos a razão trigonométrica do seno, que garante que em um triângulo retângulo, o seno de um de seus ângulos internos agudo é igual ao comprimento do cateto oposto dividido pelo comprimento da hipotenusa. Na segunda igualdade acima, substituímos a expressão $sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$ por $\frac{\sqrt{3}}{2}$, pois o seno de $sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$ é $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Por fim, a terceira igualdade é o resultado obtido após multiplicarmos os dois lados da segunda igualdade por **a**.

Após termos determinado o valor da altura do triângulo equilátero de lados **a**, iremos determinar o comprimento dos segmentos $\overline{AG}$ e $\overline{DG}$. Para tal, seguiremos passos a seguir.

-1º passo: Determinar os comprimentos de $\overline{AH}$ e $\overline{GH}$. Para isso, considere o triângulo AFH. Note que o ângulo $A\hat{E}D=\frac{\pi}{6}$ radianos, pois a mediana de um dos lados do triângulo equilátero coincide com a bissetriz do ângulo oposto, ou seja, $\overline{AD}$ é mediana do lado $\overline{CE}$ e $C\hat{A}E$ é o ângulo oposto ao lado $\overline{CE}$.

Além disso, o triângulo AFH é retângulo, pois como os segmentos $\overline{CE}$ e $\overline{BF}$ são paralelos, e $\overline{AD}$ é mediana do lado $\overline{CE}$, segue que o ângulo $A\hat{F}H$ é reto.

Dessa forma, utilizando a relação entre o seno do ângulo agudo $F\hat{A}H$ do triângulo retângulo AFH e as medidas de seus lados, teremos:

$sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{FH}{AF} \implies \frac{1}{2}=\frac{FH}{\frac{a}{2}} \implies FH=\frac{a}{4}$ unidade de comprimento.

Agora, utilizando a relação entre o cosseno do ângulo agudo $F\hat{A}H$ do triângulo retângulo AFH e as medidas de seus lados, teremos:

$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{AH}{AF} \implies \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{\frac{a}{2}} \implies AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ unidade de comprimento.

-2º passo: Determinar o comprimento de $\overline{GH}$. Para isso, considere o triângulo FGH. Note que o ângulo $C\hat{E}G$ e $C\hat{E}A$ são ângulos inscritos no mesmo arco, por isso, $C\hat{A}G = \frac{1}{2}C\hat{E}G$ e como $C\hat{A}G = \frac{\pi}{3}$ radianos, segue que $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}C\hat{E}G \implies C\hat{E}G = \frac{2\pi}{3}$ radianos.

Além disso, note que no triângulo CDE o segmento $\overline{DG}$ é mediana do lado $\overline{CE}$ e $C\hat{G}E$ é o ângulo oposto ao lado $\overline{CE}$, por isso $\overline{CE}$ é bissetriz do ângulo $C\hat{G}E$, portanto, $C\hat{G}D = \frac{1}{2}C\hat{E}G \implies C\hat{G}D = \frac{\pi}{3}$ radianos. Ainda, como $C\hat{G}D$ e $F\hat{G}H$ são ângulos opostos pelo vértice, temos que $F\hat{G}H = \frac{\pi}{3}$ radianos.

Perceba ainda que o triângulo FHG é retângulo, pois como os segmentos $\overline{CE}$ e $\overline{BF}$ são paralelos, e $\overline{AD}$ é mediana do lado $\overline{CE}$, segue que o ângulo $F\hat{H}G$ é reto.

Dessa forma, utilizando a relação entre a tangente do ângulo agudo $F\hat{G}H$ do triângulo retângulo FHG e as medidas de seus lados, teremos:

$tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{FH}{GH} \implies \sqrt{3} = \frac{\frac{a}{4}}{GH} \implies GH = \frac{a\sqrt{3}}{12}$ unidade de comprimento.

-3º passo: Determinar o comprimento de $\overline{DG}$. Para isso, considere o triângulo DEG. Note que o ângulo $D\hat{E}G = \frac{\pi}{6}$ radianos, pois, no triângulo ACE, o segmento $\overline{BE}$ é mediana do lado $\overline{AC}$ e $D\hat{E}F$ é o ângulo oposto ao lado $\overline{AC}$, por isso $\overline{BE}$ é bissetriz do ângulo $D\hat{E}F$, portanto, $D\hat{E}G = \frac{1}{2}D\hat{E}F \implies D\hat{E}G = \frac{\pi}{6}$ radianos.

Perceba ainda que o triângulo DEG é retângulo. Dessa forma, utilizando a relação entre a tangente do ângulo agudo $D\hat{E}G$ do triângulo retângulo DEG e as medidas de seus lados, teremos:

$tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{DG}{DE} \implies \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{DG}{\frac{a}{2}} \implies DG=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ unidade de comprimento.

De posse das informações obtidas, já conseguimos determinar os comprimentos de $\overline{AG}$ e $\overline{DG}$. Note, a partir da Figura 6 e dos cálculos realizados, que

$$AG=AH+GH \implies AG=\frac{a\sqrt{3}}{4}+\frac{a\sqrt{3}}{12}$$
$$\implies AG=\frac{a\sqrt{3}}{3}=\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)\left(\frac{\mathbf{a\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}\right)=\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)AD \text{ unidade de comprimento.}$$
(iv)

Ainda, note que

$$DG=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)\left(\frac{\mathbf{a\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}\right)=\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)AD \text{ unidade de comprimento. (v)}$$

Finalmente, note que

$$AG=\frac{a\sqrt{3}}{3}=(2)\left(\frac{\mathbf{a\sqrt{3}}}{\mathbf{6}}\right)=2\ DG \text{ unidade de comprimento. (vi)}$$

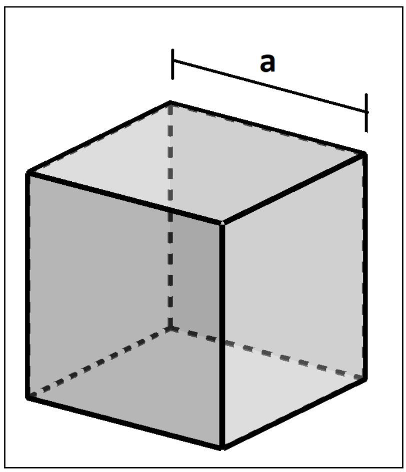
A partir dos itens (iv), (v) e (vi), mostramos que os segmentos $\overline{AG}$ e $\overline{DG}$ possuem uma proporção de 2 para 1 em relação ao segmento $\overline{AD}$.

Logo, mostramos que o baricentro de um triângulo equilátero de lado "**a**" divide a altura desse triângulo em uma proporção de 2 para 1.

4.2.2 Octaedro regular inscrito em um cubo de aresta “a”

Enunciado 4.2.2: Observe a Figura 3. Se unirmos por meio de segmentos de reta os pontos centrais das faces adjacentes de um cubo de aresta "a", qual sólido obteremos? Expresse o volume desse novo sólido obtido em função da medida "a".

Figura 3 – Cubo de aresta "a"

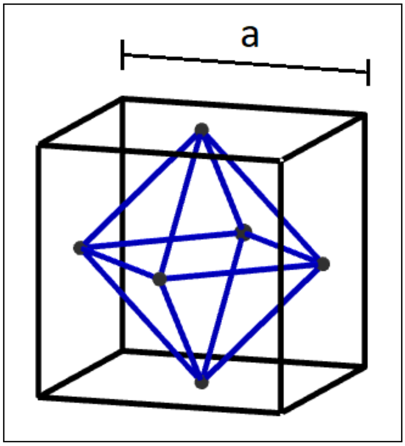


Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.2.2 : Para solucionar a questão, um dos caminhos que pode ser seguido utiliza conceitos de poliedros de platão, triângulos semelhantes e cálculo de volume de pirâmides de base quadrangular.

Demonstração 4.2.2: Inicialmente, vamos visualizar qual sólido é obtido se unirmos através de segmentos de reta os pontos centrais das faces adjacentes de um cubo de aresta "a". Para isso, podemos ilustrar as orientações do enunciado da questão utilizando fazendo uso de algum *software* de geometria (Figura 4).

Figura 4 – Sólido inscrito no cubo



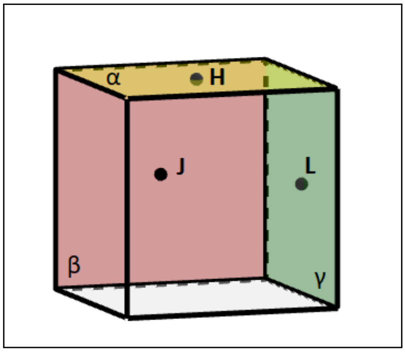
Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

A partir da Figura 4, nota-se que obtemos um sólido com doze arestas, seis vértices e oito faces triângulares, o que nos permite afirmar que esse sólido inscrito é um octaedro. A seguir mostraremos que esse sólido é regular.

Para isso, considere três faces α, β e γ quaisquer do cubo, desde que α tenha uma aresta em comum com β e outra aresta em comum com γ, que β tenha uma aresta em comum com α e outra aresta em comum com γ, e que γ tenha uma aresta em comum com α e outra aresta em comum com β.

Considere que os pontos médios das faces α, β e γ são, respectivamente, H, J e L (Figura 5).

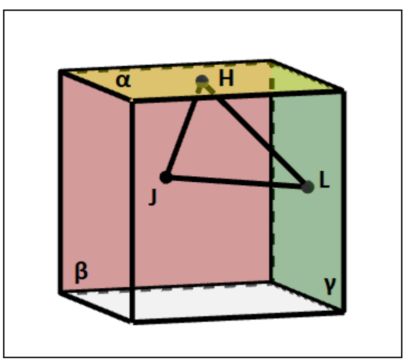
Figura 5 – Pontos médios das faces α, β e γ



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

Agora, vamos unir, por meio de segmentos de retas, os pontos médios das faces adjacentes α, β e γ (Figura 6).

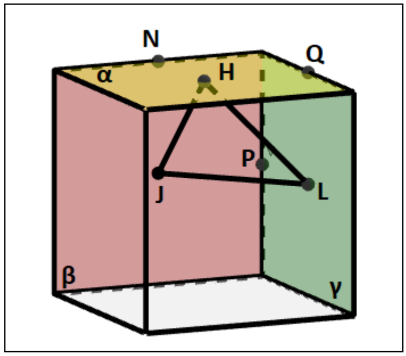
Figura 6 – Triângulo obtido a partir da união dos pontos médios das faces α, β e γ



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

Vamos definir N como sendo o ponto médio do segmento que coincide com a aresta comum às faces α e β, P como sendo o ponto médio do segmento que coincide com a aresta comum às faces β e γ, e Q como sendo o ponto médio do segmento que coincide com a aresta comum às faces α e γ (Figura 7).

Figura 7 – Pontos médios N, P e Q



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

Note que $\overline{JN} = \frac{a}{2}$, pois J é ponto médio da face β e N é ponto médio da aresta comum às faces α e β, logo $\overline{JN}$ é metade do comprimento da aresta do cubo. De forma análoga, $\overline{HN}$, $\overline{HQ}$, $\overline{LQ}$, $\overline{JP}$ e $\overline{LP}$ também medem $\frac{a}{2}$.

Perceba que o ângulo $J\hat{N}H$ é reto, pois H e J são os pontos médios das faces α e β, respectivamente, e N é o ponto médio da aresta comum as faces α e β. De forma análoga, $J\hat{P}L$ e $H\hat{Q}L$ também são ângulos retos.

Finalmente, note que os triângulos HJN e HLQ são congruentes pelo caso lado, ângulo e lado, pois:

$\overline{JN} \equiv \overline{LQ}$, pois ambos medem $\dfrac{a}{2}$
$H\hat{N}J \equiv H\hat{Q}L$, pois ambos são ângulos retos
$\overline{HN} \equiv \overline{HQ}$, pois ambos medem $\dfrac{a}{2}$.

Logo, como os triângulos HJN e HLQ são congruentes, temos que $\overline{HJ} \equiv \overline{HL}$, ou seja, possuem o mesmo comprimento.

Ainda, note que os triângulos HJN e LJP são congruentes pelo caso lado, ângulo e lado, pois:

$\overline{JN} \equiv \overline{JP}$, pois ambos medem $\dfrac{a}{2}$
$H\hat{N}J \equiv L\hat{P}J$, pois ambos são ângulos retos
$\overline{HN} \equiv \overline{LP}$, pois ambos medem $\dfrac{a}{2}$.

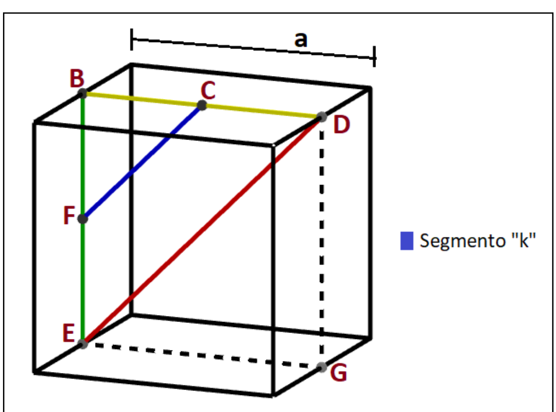
Logo, como os triângulos HJN e LJP são congruentes, temos que $\overline{HJ} \equiv \overline{LJ}$, ou seja, possuem o mesmo comprimento.

Como $\overline{HJ} \equiv \overline{HL}$ e $\overline{HJ} \equiv \overline{LJ}$, por transitividade temos que $\overline{LJ} \equiv \overline{HL}$. Assim, temos que o triângulo HJL, que é formado pelos segmentos $\overline{HL}$, $\overline{HJ}$ e $\overline{LJ}$, é equilátero.

Perceba que o triângulo equilátero HJL é quaisquer uma das faces do octaedro inscrito no cubo, por isso, de forma análoga, se repetirmos esse processo para as demais cinco faces do octaedro, constataremos que ambas são triângulos equiláteros que possuem a mesma medida de lado. Portanto, o sólido obtido pela união dos pontos médios das faces de um cubo é um octaedro regular.

Agora, para determinar o volume desse octaedro regular, primeiramente consideraremos "k" como sendo a medida da sua aresta.

Figura 8 – Relações entre "k"e "a"



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

O próximo passo para solucionar a questão consiste em expressar "k", que é a medida da aresta do octaedro regular, em função de "a", que é a medida da aresta do cubo. Para tal, escolheremos quaiquer uma das arestas do octaedro regular e buscaremos estabelecer relações entre a sua medida e a medida "a" (Figura 8).

Uma relação que pode ser observada, a partir da Figura 8, é que os triângulos BCF e BDE são semelhantes, pelo caso de ângulo, ângulo e ângulo, afinal:

$F\hat{B}C \equiv E\hat{B}D$ (i)
$B\hat{F}C \equiv B\hat{E}D$ (ii)
$B\hat{C}F \equiv B\hat{D}E$ (iii)

pois, (i) é trivial; em (ii) temos que $\overline{FC}$ e $\overline{ED}$ são segmentos paralelos e como $\overline{BE}$ é um segmento transversal a $\overline{FC}$ e $\overline{ED}$ podemos utilizar o teorema de Tales; e em (iii) temos que $\overline{FC}$ e $\overline{ED}$ são segmentos paralelos e como $\overline{BD}$ é um segmento transversal a $\overline{FC}$ e $\overline{ED}$ podemos utilizar novamente o teorema de Tales.

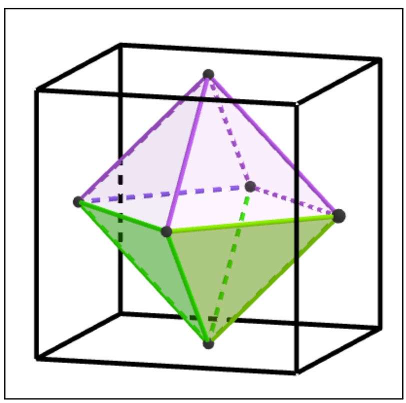
A partir desses apontamentos iniciais, observe que $\overline{ED}$ é diagonal do quadrado BDEG, e como as arestas desse quadrado medem "a", temos, pela geometria plana, que $\overline{ED} = a\sqrt{2}$. Além disso, como os triângulos BCF e BDE são semelhantes, a seguinte relação é válida:

$$\frac{BF}{BE} = \frac{k}{ED} \implies \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{k}{a\sqrt{2}} \implies \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = ak \implies k = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Note que na primeira implicação da linha acima substituímos $\overline{BF}$ por $\frac{a}{2}$, pois como o ponto F é o centro da face do cubo de aresta “a”, logo a medida de $\overline{BF}$ será metade da medida de “a”; na segunda implicação da linha acima multiplicamos os dois lados da igualdade por $a^2\sqrt{2}$; e na terceira implicação da linha acima dividimos os dois lados da igualdade por “a”. Ainda, observe que essa divisão só é possível pois admitimos que “a” é diferente de zero, afinal, estamos analisando uma situação em que “a” é um número positivo.

A partir das análises acima, constatamos que a medida da aresta do octaedro regular é k= $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Essa informação nos permite calcular o volume do octaedro regular. Para realizar esse cálculo, observe que podemos particionar o octaedro regular em duas pirâmides regulares de base quadrangular (Figura 9).

Figura 9 – Particionando o octaedro regular em duas pirâmides regulares de base quadrangular



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

Como pode ser visualizado na Figura 9, podemos calcular o volume do octaedro regular calculando o dobro do volume da pirâmide na cor roxa ou na cor verde, pois ambas possuem a mesma área da base e mesma altura, e portanto o mesmo volume. Assim, o volume do octaedro regular pode ser calculado por V= $\frac{2}{3}$ x (área da base da pirâmide) x (altura da pirâmide). Note que

- *Área da base da pirâmide*: como a base é um quadrado cujos lados medem k= $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, a área da base da pirâmide é A=$\left(\frac{\mathrm{a}\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2\mathrm{a}^2}{4} = \frac{a^2}{2}$ unidade de área.

- *Altura da pirâmide*: observe que a pirâmide possui como altura metade do valor da aresta "a", portanto, a altura da pirâmide é $\frac{a}{2}$ unidade de comprimento.

Assim, temos que o volume do octaedo em função da medida “a” é: V=$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{6}$ unidade de volume.

4.2.3 Área de um triângulo qualquer a partir das coordenadas cartesianas de seus vértices

Enunciado 4.2.3: Determine uma expressão para o cálculo da área de um triângulo qualquer ABC, no conjunto dos números reais, que utilize as coordenadas cartesianas de seus vértices.

Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.2.3: Para solucionar a questão, utilizaremos conceitos de geometria plana, tais como cálculo de figuras planas e paralelismo, e conceitos de geometria analítica, como distância entre dois pontos e plano cartesiano. Além disso, utilizaremos a técnica de demonstração direta.

Demonstração 4.2.3: Seja um triângulo qualquer com vértices nos pontos A, B e C. Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ as coordenadas dos vértices desse triângulo no plano bidimensional, onde $x_1 < x_3 < x_2$ e $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Note ainda que as coordenadas dos vértices do triângulo são genéricas, portanto, a demonstração é válida para um triângulo qualquer da geometria plana desde que respeitada as condições estabelecidas anteriormente.

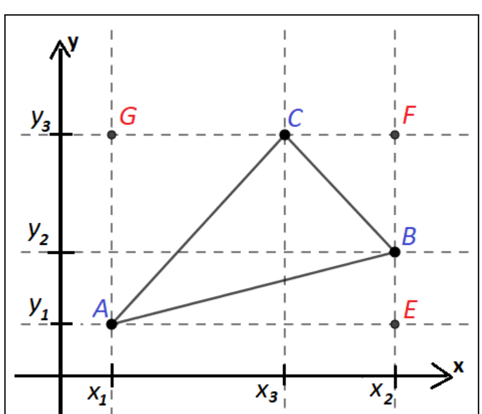
Ainda, traçamos pelo ponto A uma reta paralela ao eixo x, traçamos pelo ponto C uma reta paralela ao eixo x, e traçamos pelo ponto B uma reta paralela ao eixo x.

Agora, traçamos pelo ponto A uma reta paralela ao eixo y, traçamos pelo ponto C uma reta paralela ao eixo y, e traçamos pelo ponto B uma reta paralela ao eixo y.

Em seguida, definimos como E o ponto de interseção entre a reta paralela ao eixo y que passa por B e a reta paralela ao eixo x que passa por A. Definimos como F o ponto de interseção entre a reta paralela ao eixo y que passa por B e a reta paralela ao eixo x que passa por C. Por fim, definimos como G o ponto de interseção entre a reta paralela ao eixo y que passa por A e a reta paralela ao eixo x que passa por C.

As construções realizadas podem ser visualizadas na Figura 10.

Figura 10 – Triângulo qualquer no plano cartesiano



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

Por construção e propriedades do plano cartesiano, temos que os triângulos formados ao redor do triângulo ABC são retângulos, ou seja, os triângulos ACD, BCF e ABE são retângulos. Por consequência, temos que o triângulo ABC está inserido no retângulo AEFG.

Note que para calcular a área do retângulo AEFG, podemos somar as áreas dos triângulos ABC, ACD, BCF e ABE. Dessa forma, teríamos que a área do retângulo AEFG pode ser expressa como:

A(AEFG)= A(AEB)+A(BFC)+A(AGC)+A(ABC)

O cálculo da área dos triângulos retângulos pode ser realizado a partir da expressão $\frac{(\text{base.altura})}{2}$ e suas medidas podem ser obtidas por meio do plano cartesiano. Veja:

$$A(AEB)=\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{2}$$
$$A(BFC)=\frac{(x_2-x_3)(y_3-y_2)}{2}$$
$$A(AGC)=\frac{(x_3-x_1)(y_3-y_1)}{2}$$

Ainda, a da área de um retângulo pode ser obtida a partir do produto entre as medidas de base e altura, portanto, a área do retângulo AEFG pode ser expressa como:

A(AEFG)= $(x_2-x_1).(y_3-y_1)$.

Então, para determinarmos a área do triângulo ABC, basta subtraírmos da área do retângulo AEFG as áreas dos triângulos ACD, BCF e ABE. Assim, segue que

$$A(ABC)=(x_2-x_1).(y_3-y_1)-\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_2-y_1)+$$
$$+(x_2-x_3)(y_3-y_2)+(x_3-x_1)(y_3-y_1)]$$

Distribuindo e organizando algebricamente, temos:

$$A(ABC) = 2(x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1) - (x_2y_2 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 + x_2y_3 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_3y_2 + x_3y_3 - x_3y_1 - x_1y_3 + x_1y_1$$
$$\implies A(ABC) = 2x_2y_3 - 2x_2y_1 - 2x_1y_3 + 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_3 - x - 3y_2 + 2x_1y_1 + x_3y_1 + x_1y_3$$
$$\implies A(ABC) = x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_3y_2 + x_3y_1$$

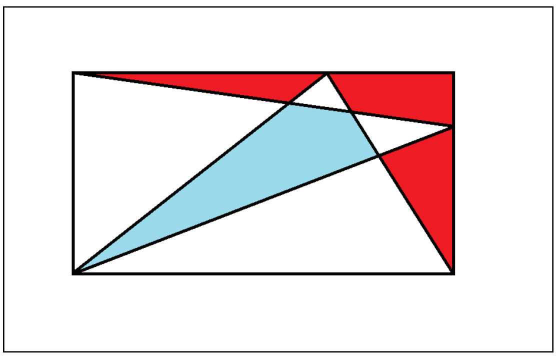
A última implicação acima nos fornece uma fórmula para calcular a área de um triângulo qualquer, cujos vértices estão nos pontos A, B e C, que possuem como coordenadas $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, onde $x_1 < x_3 < x_2$ e $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Note que a expressão $A(ABC) = x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_2 - x_3y_2 + x_3y_1$, que nos permite calcular a área do triângulo ABC, coincide com o determinante de uma matriz cujas colunas são os vetores $\vec{v}_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{v}_2 = (y_1, y_2, y_3)$ e $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$, ou seja, a área do triângulo ABC coincide com o determinante da matriz M= $[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3]$. Note ainda que o vetor $\vec{v}_1$ possui como coordenadas os valores da abscissa dos vértices A, B e C, respectivamente; e que o vetor $\vec{v}_2$ possui como coordenadas os valores da ordenada dos vértices A, B e C, repectivamente.

4.2.4 Equivalência de áreas

Enunciado 4.2.4: No retângulo a seguir, mostre que a área em azul tem a mesma medida que a área em vermelho.

Figura 11 – Retângulo com áreas em azul e vermelho



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

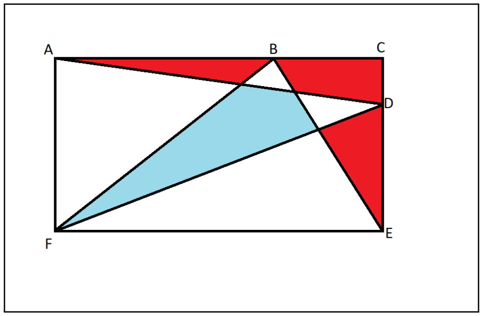
Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.2.4: Para solucionar a questão, utilizaremos o conceito do Teorema dos Carpetes.

O que é o Teorema dos Carpetes?

O Teorema dos Carpetes mostra que, se tivermos uma área coberta por dois carpetes e então deslocarmos um deles de forma que fique sobre o outro, a área que ficará sem carpete terá a mesma medida que a área coberta pela intersecção dos carpetes

Demonstração 4.2.4: Primeiramente, iremos nomear alguns pontos:

Figura 12 – Nomeando pontos para realizar a demonstração



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

Note que a área do triângulo FBE é: $\dfrac{(FE)(AF)}{2}$ ou seja, ela é metade da área do retângulo.

E a área do triângulo ADF é: $\dfrac{(AF)(FE)}{2}$ ou seja, ela também é metade da área do retângulo.

Logo, ambas as áreas dos dois triângulos são iguais, e ainda, segundo o Teorema dos Carpetes, a área em azul é igual à área em vermelho.

4.3 Álgebra: Máximo Divisor Comum (MDC)

4.3.1 Propriedade do Máximo Divisor Comum (MDC)

Enunciado 4.3.1: Mostre que o MDC de dois números consecutivos, considerando o conjunto dos números naturais, é igual a 1.

Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.3.1: Para solucionar a questão, utilizaremos essencialmente a definição de MDC, que afima:

Definição de máximo divisor comum: Sejam **a** e **b** dois números inteiros. Um elemento **d** pertence ao conjunto dos números inteiros se diz máximo divisor comum de **a** e **b** se cumpre as seguintes condições (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 39-40):

I) $\mathbf{d} \geq 0$;
II) **d** divide **a** e **d** divide **b**;
III) Todo divisor comum de **a** e **b** também é divisor de **d**.

Demonstração 4.3.1: Inicialmente, vamos considerar dois números consecutivos **a** e **a+1**, com $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}$. Seja **d** o máximo divisor comum de **a** e **a+1**, onde **d** é maior ou igual a zero (item I da definição) e pertencente ao conjunto dos números inteiros.

Assim, pela definição de MDC (item II), como **d** divide **a** e **d** também divide **a+1**, segue que

$\mathbf{a} = \alpha\ \mathbf{d}$, com $\alpha \in \mathbb{Z}$; e
$\mathbf{a+1} = \beta\ \mathbf{d} \implies \mathbf{a} = \beta\ \mathbf{d} - 1$, com $\beta \in \mathbb{Z}$.

Igualando as expressões $\mathbf{a} = \alpha\ \mathbf{d}$ e $\mathbf{a} = \beta\ \mathbf{d} - 1$, segue que

$$\alpha\ \mathbf{d} = \beta\ \mathbf{d} - 1$$
$$\implies \alpha\ \mathbf{d} - \beta\ \mathbf{d} = -1 \implies \mathbf{d}(\alpha - \beta) = -1$$
$$\implies \mathbf{d} = \frac{-1}{(\alpha - \beta)},\ (\alpha - \beta) \neq 0$$

Nas linhas anteriores, na primeira implicação somamos nos dois lados da primeira igualdade a expressão $(-\beta\ \mathbf{d})$. Na segunda implicação, colocamos o fator **d** em evidência. Por fim, na terceira implicação, dividimos os dois lados da terceira igualdade por $(\alpha - \beta)$. Note que admitimos que $(\alpha - \beta)$ é diferente de zero, pois além de não estar definido divisões por zero no conjunto dos números inteiros, como **a** e **a+1** são números consecutivos e $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{d}$ e $\mathbf{a+1} = \beta\ \mathbf{d}$, obviamente $\alpha \neq \beta \implies \alpha - \beta \neq 0$.

Como **d** é maior ou igual a zero (item I da definição de MDC) e pertencente ao conjunto dos números inteiros, temos que para a divisão $\frac{-1}{(\alpha - \beta)}$ resultar em um valor que obedeça às condições estabelecidas para **d**, $(\alpha - \beta)$ só pode ser igual a -1. Assim, segue que $\mathbf{d} = \frac{-1}{(-1)} = 1$.

De fato, note que a igualdade (α - β = -1) equivale a ($\beta = \alpha - 1$), pois

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{d} \text{ e } \mathbf{a+1} = \beta\mathbf{d} \implies \mathbf{a+1} > a \implies \beta > \alpha$$

Se $\beta > \alpha$, digamos $\beta = \alpha + k$, com k $\in \mathbb{N}$, temos que

$$\mathbf{a+1} = \beta\mathbf{d} = (\alpha + \mathrm{k})\mathbf{d} = \alpha\mathbf{d} + \mathrm{k}\mathbf{d}$$
$$\implies \mathbf{a+1} = \mathbf{a} + \mathrm{k}\mathbf{d}, \text{ pois } \alpha\mathbf{d} = \mathbf{a} \implies \mathrm{k}\mathbf{d} = 1 \implies \mathrm{d} = \frac{1}{k}$$

Como d $\in \mathbb{N}$, segue que k=1. Assim, se k=1, segue que $\beta = \alpha + \mathrm{k} = \alpha + 1$. Logo, mostramos que o MDC de dois números consecutivos é igual a 1.

4.3.2 MDC de números da forma "a" e "5a + 1"

Enunciado 4.3.2: Mostre que o MDC de **a** e **5a +1** é igual a 1, quando $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}$.

Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.3.2: Para solucionar a questão apresentada, utilizaremos essencialmente a definição de MDC, que encontra-se no tópico 4.3.1.

Demonstração 4.3.2: Inicialmente, como descrito no enunciado da questão 4.3.1, vamos considerar dois números da forma **a** e **5a +1**, com $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}$. Seja **d** o máximo divisor comum de **a** e **5a +1**, onde **d** é maior ou igual a zero (item I da definição de MDC) e $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}$.

Assim, pela definição de MDC (item II), como **d** divide **a** e **d** também divide **5a+1**, segue que

$\mathbf{a}= \alpha\ \mathbf{d}$, com $\alpha \in \mathbb{Z}$; e
$\mathbf{5a+1}= \beta\ \mathbf{d} \implies \mathbf{a}=(\beta\ \mathbf{d}-1)\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)$, com $\beta \in \mathbb{Z}$.

Igualando as expressões $\mathbf{a}= \alpha\ \mathbf{d}$ e $\mathbf{a}=(\beta\ \mathbf{d}-1)\left(\frac{1}{5}\right)$, segue que

$$\begin{aligned}
&\alpha\ \mathbf{d}=(\beta\ \mathbf{d}-1)\left(\frac{1}{5}\right)\\
&\implies \alpha\ \mathbf{d}=(\beta\ \mathbf{d})\left(\frac{1}{5}\right)+(-1)\left(\frac{1}{5}\right)\\
&\implies \alpha\ \mathbf{d}-(\beta\ \mathbf{d})\left(\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{-1}{5}\right)\\
&\implies \mathbf{d}(5\alpha-\beta)=-1 \implies \mathbf{d}=\frac{-1}{(5\alpha-\beta)}\\
&\implies \mathbf{d}=\frac{1}{(\beta-5\alpha)},\ \text{com } (\beta-5\alpha)\neq 0.
\end{aligned}$$

Nas linhas anteriores, na primeira implicação realizamos a distributividade à direita da multiplicação com relação à subtração na expressão (β **d** - 1) $\left(\frac{1}{5}\right)$, pois ela é válida em operações com números inteiros. Na segunda implição, somamos nos dois lados da segunda igualdade a expressão $-(\beta\ \mathbf{d})\left(\frac{1}{5}\right)$. Na terceira implicação, colocamos o termo **d** em evidência. Na quarta implicação, multiplicamos os dois lados da quarta igualdade pela expressão $\frac{1}{(5\alpha-\beta)}$. E por fim, na quinta implicação, multiplicamos $\frac{-1}{(5\alpha-\beta)}$ por $\left(\frac{-1}{-1}\right)=1$.

Note que admitimos que $(\alpha-\beta)$ é diferente de zero pois não estão definidas divisões por zero no conjunto dos números inteiros. Além disso, como **d** é maior ou igual a zero (item I da definição de MDC) e pertencente ao conjunto dos números inteiros, temos que para a divisão $\frac{1}{(\beta - 5\alpha)}$ resultar em um valor que obedeça às condições estabelecidas para $\mathbf{d}$, $(\beta - 5\alpha)$ só pode ser igual a 1. Assim, segue que $\mathbf{d} = \frac{1}{(1)} = 1$.

Logo, mostramos que o MDC de **a** e **(5a +1)** é igual a 1.

Note ainda que a igualdade $(\beta - 5\alpha = 1)$ equivale a $(\beta = 5\alpha + 1)$, pois como

$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{d} \implies 5\mathbf{a} = 5\alpha\mathbf{d}$

Segue que

$\mathbf{5a{+}1} = \beta\mathbf{d}$
$\implies 5\alpha\mathbf{d} + 1 = \beta\mathbf{d}$, pois $5\mathbf{a} = 5\alpha\mathbf{d}$
$\implies 5\alpha + 1 = \beta$, pois como mostrado anteriormente $\mathbf{d}=1$.

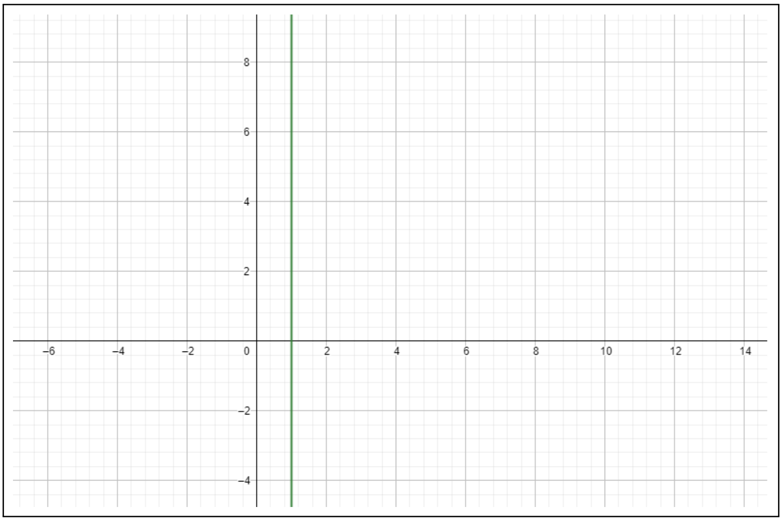
Assim, concluímos que $\beta = 5\alpha + 1$.

4.4 Funções

4.4.1 Há curvas que não são funções

Enunciado 4.4.1: Mostre que a reta paralela ao eixo y que passa por $x = 1$ não é uma função.

Figura 13 – Reta paralela ao eixo y que passa por $x = 1$



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.4.1: Para solucionar a questão será utilizada essencialmente a definição de função.

Demonstração 4.4.1: Provaremos por absurdo que a reta paralela ao eixo y que passa por $x = 1$ não é uma função, logo, tentaremos mostrar que $x = 1$ é uma reta do tipo $y = ax + b$. Seja

$a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (coeficiente angular)

Tomando dois pontos (1,0) (1,1), temos:

$$\frac{0-1}{1-1} = \frac{-1}{0}$$

A divisão por zero não existe. E como o coeficiente ângular consequentemente não existirá, não há função que irá descrever.

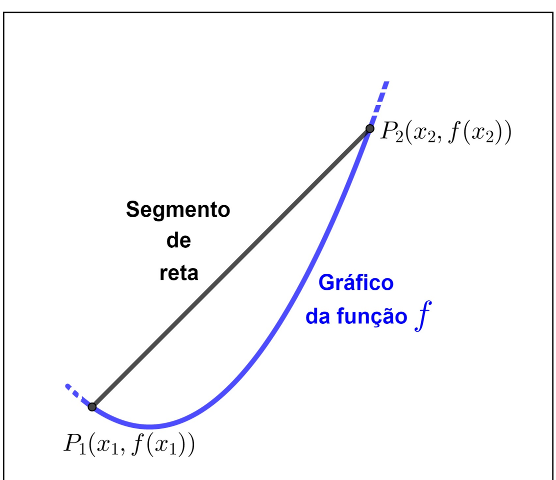
4.4.2 Concavidade do gráfico de uma função quadrática

Enunciado 4.4.2: Mostre que o gráfico da função quadrática (parábola) $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ é côncavo para cima para todo $x \in \mathbb{R}$ se $a > 0$.

Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.4.2: Para solucionar a questão, utilizaremos essencialmente as definições de função quadrática côncava para cima e côncava para baixo. Por isso, seguem duas definições sobre o conceito de concavidade de uma função quadrática.

1ª Definição (concavidade voltada para cima): Dizemos que o gráfico de uma função $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ é *côncavo para cima* no intervalo aberto (x_1, x_2) se o segmento de reta com extremos em $P_1(x_1, f(x_1))$ e $P_2(x_2, f(x_2))$ está localizado acima do gráfico de f (Figura 14).

Figura 14 – Segmento acima do gráfico de f



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

Em outras palavras, podemos considerar a equação reduzida da reta suporte do segmento considerado com extremos em P_1 e P_2:

$$y = mx + n, \text{ com } m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ e } n = \frac{x_2 f(x_1) - f(x_2)x_1}{x_2 - x_1}$$

para reformular a definição anterior.

2ª Definição (concavidade voltada para cima): Dizemos que o gráfico de uma função $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ é *côncavo para cima* no intervalo aberto (x_1, x_2), se $y > f(x)$, para todo $x \in (x_1, x_2)$

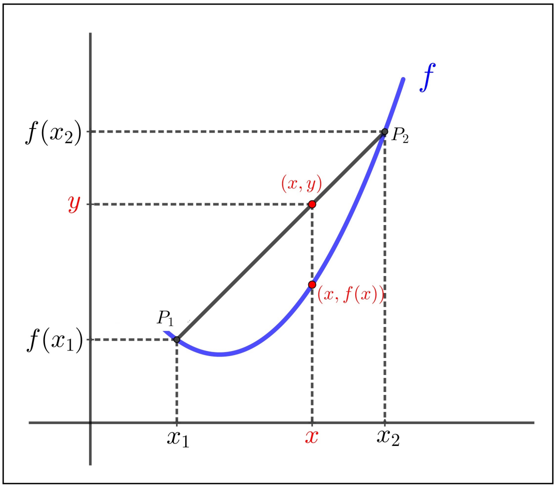
onde

$$y = \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right)x + \frac{x_2 f(x_1) - f(x_2)x_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{(iv)}$$

Observação: dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui gráfico *côncavo para cima* se *para todo* intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$, o gráfico de $f|_I : I \to \mathbb{R}$ (função f restrita ao intervalo fechado I) é côncavo para cima.

Demonstração 4.4.2: Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática com $a > 0$. Sem perda de generalidade, suponha $x_1 < x_2$ pertencentes ao domínio da função f e $x \in (x_1, x_2)$. A mostrar que $y > f(x)$ onde y é dado por (iv).

Figura 15 – Estratégia para demonstração da afirmação



Fonte: Imagem elaborada pelos autores, 2020.

Para isso, mostraremos que $y - f(x) > 0$:

$$(x_2 - x_1)(y - f(x)) = (x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)f(x)$$
$$\implies (x_2 - x_1)(y - f(x)) =$$
$$(f(x_2) - f(x_1))x + x_2 f(x_1) - f(x_2)x_1 - (x_2 - x_1)f(x)$$
$$\implies (x_2 - x_1)(y - f(x)) =$$
$$[a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)]x + a(x_2 x_1^2 - x_1 x_2^2) - (x_2 - x_1)(ax^2 + bx)$$
$$\implies (x_2 - x_1)(y - f(x)) = ax(x_2^2 - x_1^2) + ax_1x_2(x_1 - x_2) - ax^2(x_2 - x_1)$$
$$\implies (x_2 - x_1)(y - f(x)) = -a(x_2 - x_1)(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$$
$$\implies (x_2 - x_1)(y - f(x)) = -a(x_2 - x_1)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$\implies y - f(x) = -a(x - x_1)(x - x_2), \qquad \text{(v)}$$

Como consideramos $x \in (x_1, x_2)$, temos:

$x_1 < x < x_2 \Rightarrow x - x_1 > 0$ e $x - x_2 < 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) < 0$.

Por hipótese $a > 0$, com isso:

$$y - f(x) = -a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Rightarrow y > f(x), \text{ para todo } x \in (x_1, x_2).$$

Como os valores $x_1 < x_2$ foram escolhidos de forma arbitrária em $\mathbb{R}$, podemos concluir que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é **côncavo para cima**.

Observações:

1. Iniciamos a demonstração com a expressão $(x_2 - x_1)(y - f(x))$ puramente para simplificar a escrita. O resultado em (v) pode ser obtido iniciando a demonstração com a expressão $y - f(x)$ diretamente.

2. A expressão obtida em (v) pode ser usada para mostrar que a condição $a > 0$ é necessária, além de ser suficiente.

4.5 Teoria dos conjuntos: noções de conjuntos e finitude

4.5.1 Um subconjunto dos naturais é finito se é limitado

Enunciado 4.5.1: Mostre que um subconjunto dos naturais é finito se é limitado

Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.5.1: Utilizaremos essencialmente noções de conjuntos e finitude. Embora este seja um resultado elementar, o lema integra a teoria de conjuntos e faz parte da construção e caracterização de conjuntos finitos, os quais são de suma importância para que se possa fazer a extensão aos números reais. A demonstração é direta e requer pouca notação.

Demonstração 4.5.1: Podemos chamar de A o subconjunto dos naturais em questão. Estamos supondo que A é finito, assim, podemos dizer que A possui, por exemplo, n elementos. Listando esses elementos, nosso conjunto pode ser escrito na forma

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\},$$

sendo a_1, a_2, ... , a_n elementos do conjunto A.

Queremos provar que A é limitado, ou seja, devemos encontrar um número natural que seja maior ou igual a cada um dos elementos de A. Intitulemos de M tal número.

Se tomarmos

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

vemos que M satisfaz o que queremos. Dessa forma, A é, de fato, limitado.

4.6 Aritmética

4.6.1 Soma dos quadrados dos *n* primeiros números naturais

Enunciado 4.6.1: Seja $n \in \mathbb{N}$. A soma dos quadrados dos n primeiros naturais é dada por:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1}$$

Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.6.1: Para solucionar o problema, iremos utilizar o Princípio da Indução Finita e também as operações básicas.

Demonstração 4.6.1: Por inducão em n. A mostrar a base de indução $n = 1$:

$$\frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2.$$

Supondo que (Hipótese de Indução - HI)

$$1^2+2^2+\cdots+(k-1)^2+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

É válido para $k<n$, a mostrar que

$$1^2+2^2+\cdots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Então:

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\cdots+(k-1)^2+k^2+(k+1)^2 &\overset{HI}{=} \\
\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{6(k+1)^2}{6} &= \\
\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} &= \\
\frac{(k+1)[2k^2+k+6k+6]}{6} &= \\
\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Pois, de fato $(k+2)(2k+3)=2k^2+3k+4k+6=2k^2+7k+6=2k^2+k+6k+6$.

Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, (1) é verdade.

4.6.2 Propriedade de Paridade dos Números

Enunciado 4.6.2: Mostre que x^2+x é par se $x>1$ e $x\in\mathbb{N}$.

Conceitos que serão utilizados na demonstração 4.6.2: para solucionar a questão, iremos utilizar o conceito de paridade de um número.

Demonstração 4.6.2: Note que só há duas formas de escrever x, que são:

$x = 2k$ (caso "x" seja par), $k \in \mathbb{N}$
$x = 2j + 1$ (caso "x" seja ímpar), $j \in \mathbb{N}$

Assim, há duas possibilidades para a expressão $x^2 + x$:

1ª possibilidade) Se $x = 2k$, temos:

$$x^2 + x = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$$

Note que na possibilidade de x ser um número par, o resultado da expressão $x^2 + x$ resulta em um valor múltiplo de dois e, portanto, par também.

2ª possibilidade) Se $x = 2j + 1$, temos:

$$x^2 + x = (2j + 1)^2 + (2j + 1) = (4j^2 + 4j + 1) + (2j + 1) = 2(2j^2 + 3j + 1)$$

Note que na possibilidade de x ser um número ímpar, o resultado da expressão $x^2 + x$ resulta em um valor múltiplo de dois, ou seja, um número par.

Logo, a expressão $x^2 + x$ terá como resultado um valor par para qualquer $x \in \mathbb{N}$.

5. Considerações Finais

EMBORA haja um número significativo de pesquisas que investiguem as vantagens e desvantagens de utilizar demonstrações nas aulas de Matemática, parece que não se tem um consenso por parte de professores e pesquisadores da área se essas demonstrações devem ou não ser inseridas na sala de aula (SOARES; NASCIMENTO AFRO; BRITO, SOUZA, 2012).

De acordo com Junior e Nasser (2014, p. 1030), muitos alunos utilizam fórmulas matemáticas sem ter a compreensão do que estão fazendo e os motivos que tornam esses procedimentos válidos. Esse fato se verifica, por exemplo, quando são propostas questões matemáticas mais elaboradas, que exigem maior aprofundamento lógico-dedutivo, e uma parcela significativa dos estudantes encontram dificuldades que impossibilita-os de resolvê-las (ALMEIDA, 2007).

Para que as demonstrações sejam incluídas de forma adequada nas aulas de matemática, a fim de não exigir demasiadamente dos alunos, faz-se necessário compreendermos que a argumentação lógico-dedutiva deve ser desenvolvida no decorrer dos anos escolares, conforme previsto na BNCC (2018) e nos PCNs (1998), com atividades que exijam um aprimoramento gradual da capacidade argumentativa, possibilitando que os estudantes consigam formular argumentos que sejam aceitos como demonstrações matemáticas (LIMA; LINS, 2015, p. 2).

Dessa forma, as demonstrações podem auxiliar os estudantes a compreenderem a validade dos conceitos e processos matemáticos, contribuindo também na significação desses objetos e no desenvolvimento da capacidade de argumentar e justificar ideias (BRASIL, 2017, p. 298). É por meio de atividades que estimulem a realização de demonstrações que os alunos poderão, gradativamente, compreender, analisar e avaliar as próprias argumentações, a dos colegas e a dos professores (BRASIL, 2018, p. 299).

Nesse material foram apresentadas demonstrações matemáticas que foram realizadas a partir de conceitos previstos para o Ensino Básico. Esperamos que elas possam auxiliar os professores de matemática a incluírem demonstrações nas aulas de matemática.

Referências

ALMEIDA, J. C. P. *Argumentação e prova na matemática escolar do ensino básico:* A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica (PUC), São Paulo, 2007.

BRASIL.*Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Educação é a Base. Brasília, DF: MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. *Relatório Brasil PISA (versão preliminar).* Brasília, DF: MEC/INEP, 2019.

CARVALHO, A. M. F. T. *A Extimidade da Demonstração.* Tese (Doutorado) – Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, São Paulo, 2004.

DE VILLIERS, M. Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração no ensino em geometria dinâmica. *Actas do ProfMat.* Lisboa: APM, 2002.

DEMONSTRAÇÃO. In: HOUAISS. Dicionário Online de Português. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/houaiss/>. Acesso em: mar. 2020.

DOMINGUES, H, H.; IEZZI, G. *Álgebra Moderna.* Volume único, 4 ed. São Paulo: Atual, 2003.

HANNA, G. Challenges to the importance of proof. *For the learming of mathematics*, n.15. p. 42-49, 1995.

JÚNIOR, C. A. A.; NASSER, L. Analisando justificativas e argumentação Matemática de alunos do Ensino Fundamental. *VIDYA (on-line)*, v. 32, n. 2, p.133-147, jul./dez., 2012.

JUNIOR, C. A. A.; NASSER, L. Estudo sobre a Visão do Professor em Relação à Argumentação e Prova Matemática na Escola. *Bolema,* Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1012-1031, dez. 2014.

LIMA, M. L. S; LINS, A. F. O uso de provas e demonstrações matemáticas e suas verificações no aplicativo Geogebra. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2., 2015, Campina Grande. *Anais II Congresso Nacional de Educação.* Campina Grande: CONEDU, 2015.

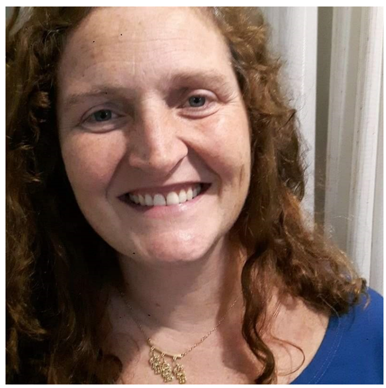
OCDE. Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico. *10 Questões para Professores de Matemática...e como o PISA Pode Ajudar a Respondê-las.* Tradução: Thiago Pandim. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

PIETROPAOLO, R. C. *(Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores da educação básica.* Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2005.

PROVA. In: HOUAISS. Dicionário Online de Português. Disponível em: https://www.dicio.com.br/ houaiss/. Acesso em: mar. 2020.

Sobre os autores

Aline Silva De Bona



Professora de Matemática do IFRS – Campus Osório. Mestre em Ensino de Matemática e Doutora em Informática na Educação pela UFRGS. Pós Doutora em Psicologia da Aprendizagem, Desenvolvimento e Personalidade pela USP. Criadora e Líder do Grupo de Pesquisa MATEC- Matemática e suas Tecnologias, certificado pela instituição e CNPq, desde 2010, no IFRS - Campus Osório. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0264896077247150>

MATEC

Matemática e suas Tecnologias

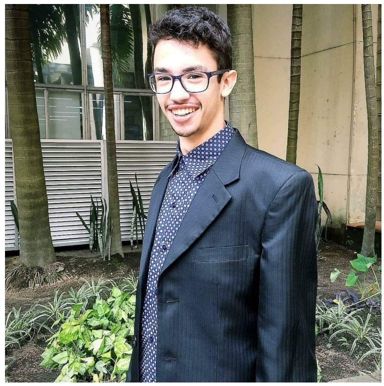
Jenifer Cassandra da Silva Oliveira

Acadêmica de Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), Campus Osório. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/2676724425968035>

Guilherme Ferreira Monteiro

Professor de Matemática do IFRS – Campus Osório. Licenciado em Matemática na UFRGS, Mestre e Doutor em Matemática Aplicada pela UFRGS. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/2630997928786699>

Bruno Ferreira da Luz



Acadêmico de Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), Campus Osório. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/8581830378280140>

Fernando Rodrigues de Oliveira

Professor de Matemática do IFRS – Campus Osório. Mestre e Doutor do Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp) da UFRGS atuando na área de Fenômenos de Transporte. A principal área de pesquisa encontra-se no estudo da solução do sistema de equações diferenciais parciais que modelam o problema de cinética de difusão de nêutrons espacial. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/2798499693773490>