



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
RIO GRANDE DO SUL  
Câmpus Farroupilha

## PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA CAVIDADE HIDRODINÂMICA POR ABORDAGEM MISTA ENTRE O MÉTODO ESPECTRAL GITT E DIFERENÇAS FINITAS.

Gabriel Smaniotto Slomp, gabrisslomp@gmail.com<sup>1</sup>  
Sérgio Wortmann, sergio.wortmann@farroupilha.ifrs.edu.br<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Instituto Federal do Rio Grande do Sul, Campus Farroupilha. Av. São Vicente - Cinquentenário, Farroupilha - RS, 95180-000.

**Resumo:** Neste trabalho são propostas algumas tentativas para mesclar a Técnica Transformada Integral Generalizada GITT com o método das diferenças finitas aplicados ao problema da cavidade hidrodinâmica. Partindo das equações do momento para as velocidades longitudinais e transversais, desenvolve-se a Equação da pressão de Poisson EPP, para compor o sistema de equações a ser trabalhado. De posse do equacionamento são desenvolvidas três tratativas. A primeira é a aplicação direta de diferenças finitas com o solver PRIME. A Segunda é aplicação da GITT na EPP afim de utilizá-la como etapa do solver sem ser necessário método iterativo. Por fim, a terceira abordagem transforma todo o sistema composto da EPP e das equações do momento na direção  $x$  via GITT, posteriormente aplica-se diferenças finitas na direção  $y$  afim de se obter um sistema não linear que provém a solução.

**Palavras-chave:** Cavidade Hidrodinâmica, GITT, Diferenças finitas, CFD, Métodos híbridos, Equação da pressão de Poisson

### 1 INTRODUÇÃO

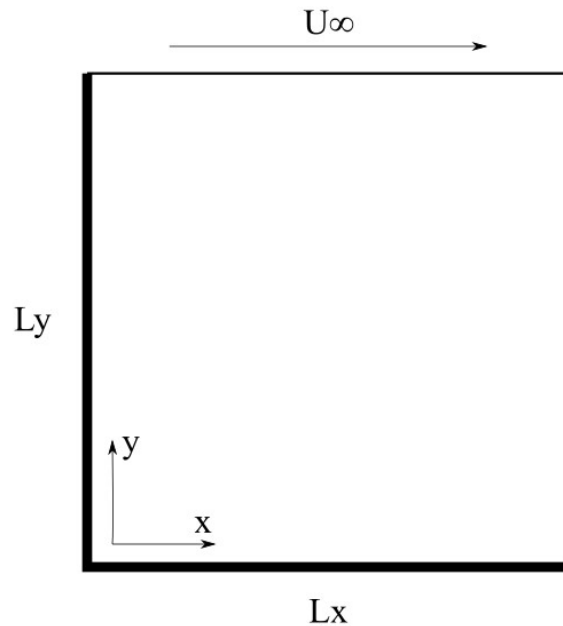
Amplamente conhecido em estudos relacionados a fenômenos de transporte, o problema da cavidade hidrodinâmica é icônico devido a extensiva utilização no desenvolvimento e teste de métodos de solução via Dinâmica dos Fluidos Computacional CFD. O principal fator se deve a facilidade de discretização, mantendo a complexidade de equacionamento. Visto que o problema é de grande interesse no campo acadêmico, é possível encontrar diversos tratamentos para a obtenção de soluções e, com isso, tem-se uma estrutura de *benchmark* (resultados numéricos e referências de desempenho) robusta para validar as metodologias testadas.

O problema clássico da cavidade hidrodinâmica CHD (Figura 1), como descrito por Kuhlmann e Romanò (2019) consiste em uma cavidade bidimensional retangular preenchida por um fluido. A aresta superior do domínio está sujeita a velocidade constante representada pelo símbolo  $U_\infty$  e contornos restantes são estacionários, ou seja, com velocidades nulas;. A solução do problema da cavidade consiste em encontrar o campo de velocidades que representa o comportamento das correntes de fluxo. É importante ressaltar que se trata de um problema de validação de métodos numéricos e espectrais, e portanto diversos estudos e mesmo aplicações comerciais de CFD tem interesse e conhecimento do do problema da cavidade hidrodinâmica. Dentro do problema clássico, as equações de Navier e Stokes (as quais serão abreviadas por N-S ao longo do texto) modelam fisicamente a problemática. Todavia a natureza não linear do equacionamento e o acoplamento das variáveis primitivas no sistema de equações faz com que os autores busquem simplificações para diminuir gasto computacional e facilitar convergência nos procedimentos.

Ao longo do desenvolvimento, foi percebido ampla gama de opções numéricas já empregadas em CFD, dentre as principais destacam-se elementos finitos, diferenças finitas e volumes finitos. Optou-se por utilizar diferenças finitas devido a possibilidade de manter elevada semelhança entre equacionamento em variáveis primitivas e as metodologias propostas. Foram encontrados estudos que resolveram o problema citado com abordagens puramente numéricas e espectrais-numéricas. Este trabalho explora a combinação da metodologia Técnica Transformada Integral Generalizada GITT com métodos numéricos. Para o problema da cavidade hidrodinâmica são propostos métodos para a obtenção dos campos de velocidade, bem como o controle da metodologia utilizada.

Manter o equacionamento próximo ao formato tradicional possibilitou a conexão da discretização numérica com a GITT. A GITT é uma ferramenta matematicamente poderosa, todavia requer um trabalho analítico que é mais complexo e fundamenta-se em uma matemática mais sofisticada. Com isso a compreensão e aplicação exigem mais esforço, a técnica ainda é fruto de estudo e constantemente são desenvolvidos novos trabalhos acadêmicos aplicando-a nas mais diversas áreas físicas.

O propósito deste trabalho é resolver distintamente as expressões matemáticas que compõem a problemática citada, para tal são propostas duas metodologias:



**Figura 1 – Geometria da cavidade hidrodinâmica com tampa deslizante.**

1. As equações de momento que compõem o equacionamento de N-S serão aproximadas por diferenças finitas, e a resolução da equação da pressão será via aplicação das transformadas da GITT.
2. Como é necessário resolver simultaneamente três equações, será empregada GITT em uma das direções para as três equações, porém na outra direção utiliza-se diferenças finitas.

Ademais será demonstrada brevemente a aplicação de diferenças finitas afim de elucidar a técnica voltada ao problema proposto. Com isso pode-se calcular efetivamente e prover as métricas necessárias para comparação. Desenvolveu-se um algoritmo em Python com as rotinas numéricas propostas e desta forma obteve-se os campos de pressão e velocidade na cavidade para números de Reynolds ( $Re$ ) de 100 e 400.

Para o desenvolvimento deste, alguns aprendizados subsequentes fazem-se necessários. Foi preciso compreender a técnica de GITT e da Técnica de Transformada Integral Clássica *CITT*, e com isso, entender a aplicação dos autovalores e autovetores na determinação de uma base para solução, a expansão de funções em somatórios de parcelas de uma mesma função, entre outras formalidades das técnicas espectrais mencionadas. Ainda tem-se o desafio de tratar analiticamente o problema para que seja possível aplicar a GITT e suas respectivas transformadas.

De forma análoga, a aplicação de diferenças finitas demanda entendimentos específicos. Por exemplo há diversas formas de discretização, bem como diferentes erros associados. Observa-se também que dependendo das condições de contorno existem escolhas preferíveis de aproximação. Visto que o sistema passa a ser discreto, é importante entender como manter os parâmetros de divisão equilibrados evitando custo computacional, resultados vagos e problemas de convergência.

Há ainda diversos *solvers* dentre o amplo universo de métodos numéricos. Com isso, existem diversas metodologias e concepções para resolução de problemas e seus níveis de abstração e simplificações adotadas. O presente trabalho não tem a pretensão de aprofundar-se no minimalismo e nem na mais eficiente forma numérica de resolução, uma vez que a amplitude do tema foge à proposta. Quanto ao equacionamento do sistemas de equações diferenciais parciais (EDPs) que estruturam fisicamente o problema estabelecem características que dificultam a solução. Dito isso, é importante perceber a não linearidade nas equações de N-S bem como o vigoroso acoplamento entre as componentes de velocidade e pressão. Buscou-se então alternativas para contornar tais objeções.

Bem como os aprofundamentos realizados nas áreas citadas, optou-se por explorar e utilizar Python como a linguagem de programação. Tal escolha se justifica com a forma de lidar com matrizes, ampla quantidade de funções matemáticas de alto nível e sintaxe simples, assim como a facilidade de apresentar resultados. Apesar das qualidades, por ser uma linguagem interpretada e não compilada tem-se um deficit de velocidade que o torna inviável para *solvers* com aplicações comerciais.

A motivação para resolução de um problema de escopo tão aberto vem da dificuldade prévia do autor na resolução do problema, lembrando a época de estudo, onde muitos dos conceitos eram abstratos. Atualmente o autor vê este problema em específico como o mais intrigante dentre os vistos no curso de engenharia mecânica. Pois apesar de existirem diversas formas de solução, ao tentar aplicar as metodologias já rotinizadas fica evidente que sempre há alguma complicação, seja a dificuldade de convergência, as diversas possibilidades de discretização e *solvers*, ou mesmo a dificuldade de obter um campo de pressão que satisfaça o sistema de EDPs. Vê-se no problema da cavidade hidrodinâmica uma provocação onde

a simplicidade do enunciado esconde a sofisticação necessária para resolução. Desta forma a combinação das ferramentas matemáticas aplicadas, com acurácia, na CHD promove precedentes para investigação da técnica proposta em demais empregos na mecânica dos fluidos e em outras áreas.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Dentre os trabalhos acadêmicos que dissertam sobre Fenômenos de transporte, e de forma mais específica, sobre comportamento de fluxos de fluidos foram selecionados os registros apresentados. Filtrou-se a busca principalmente pelos assuntos relacionados com: Dinâmica dos fluidos computacionais, Métodos espectrais para resolução equações diferenciais parciais (EDP) e Método das Diferenças finitas.

Em Silva et al. (2010) foi determinado o desenvolvimento do perfil de velocidades de um escoamento em tubo circular. Para tal solução, a abordagem utilizada foi híbrida, mesclando a Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT) com rotina numérica para solução do problema invertido resultante. Percebe-se que o equacionamento utilizado provem das equações de Navier-Stokes, onde se faz o uso das equações em formulação de função de fluxo, para coordenadas cilíndricas, considerando fluido incompressível e fluxo laminar em regime estacionário. Já em Guigon et al. (2007), foi utilizada abordagem similar a de Silva et al. (2010) para solução do problema da cavidade hidrodinâmica, porém o equacionamento é cartesiano e o foco do estudo é na otimização da sub-rotina numérica.

Um tratamento distinto para o problema da cavidade hidrodinâmica pode ser observado em Curi et al. (2014). Neste, o autor fundamenta-se na formulação das equações de N-S em variáveis primitivas (velocidade e pressão explícitas). Ao decorrer do texto manipula-se matematicamente as equações a fim de eliminar o termo da pressão das equações. Tal abordagem permite eliminar também a necessidade de resolver simultaneamente os campos de velocidade e pressão (Conhecido na literatura como acoplamento velocidade-pressão). Importante ressaltar que se manteve a característica de fluido incompressível, porém agora considerando escoamento em regime transiente. O campo de pressão é solucionado junto a equação da continuidade, uma vez que esta é “substituída” pela Equação da pressão de Poisson, como descrito detalhadamente em Salih (2013) e Rocho e Rosa (2012).

Salih (2013) demonstra a obtenção da formulação de funções de fluxo advindo das equações de N-S em variáveis primitivas. Ademais, o autor detalha o processo da descrição da Equação da pressão de Poisson (EPP) a partir das equações do momento para as velocidade longitudinal  $x$  e transversal  $y$ . Partindo destes equacionamentos, resolveu o problema da cavidade hidrodinâmica bidimensional via diferenças finitas. Nota-se que a discretização das derivadas de espaço fora por diferenças centrais de segunda ordem, já as derivadas temporais pelo método das diferenças avançadas de Euler.

A dissertação de Rocho e Rosa (2012) também trata do problema da cavidade hidrodinâmica, demonstrando as condições de contorno de Dirichet e Neumann e suas respectivas peculiaridades. Explica sobre os modelos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel e o método SOR (sobre relaxações sucessivas) para resolução do problema numérico proveniente da discretização. No mesmo escopo, demonstra as relações das Condições de Contorno (CC) e dos métodos numéricos com a Equação da Pressão de Poisson **EPP** e obtém uma solução da cavidade hidrodinâmica (CHD) com o Algoritmo PRIME (Pressão Implícita Momento Explícito) de Griebel, Dornseifer e Neunhoffer.

Como mostrado, diversos trabalhos resolveram o problema da cavidade hidrodinâmica via métodos numéricos, e alguns resolveram via tratamentos espectrais. Percebeu-se também que existe uma dificuldade comum ao lidar com o termo da pressão nas equações de N-S. O trabalho proposto aqui trata do clássico problema da cavidade hidrodinâmica explorando uma interpretação mista entre numérico e espectral. Diferentemente da abordagem híbrida de Silva et al. (2010) onde a solução do problema resultante de GITT é via convergência numérica, neste busca-se desenvolver equações mesclando as técnicas e por fim analisar suas viabilidade de aplicação.

## 3 DESENVOLVIMENTO

Ao longo do desenvolvimento será utilizado os conceitos vistos em Rocho e Rosa (2012) e Bergamo e Fernandes (2013) para o desenvolvimento da Equação da pressão de Poisson (EPP). Visto que o acoplamento pressão velocidade que ela proporciona é essencial para a resolução do problema fluídico. Ademais, o desenvolvimento do equacionamento facilita ao leitor entender algumas tratativas presentes neste trabalho que necessitam de etapas intermediárias da definição da EPP.

Em LeVeque (2007) e Moran, Shapiro e Boettner (2000) tem definições e metodologia para a aplicação do método de diferenças finitas, através disto é possível discretizar a problemática, aplicar as condições de contorno, bem como compreender a utilização de *solvers* numéricos para obter solução.

Partindo para GITT, em Wortmann (2003), Cenedese (2005), Curi et al. (2014) e Cotta (1993) entende-se a utilização da técnica de forma teórica e aplicada. Dito isso, os conceitos desenvolvidos nesses, e por esses autores desenvolve-se a aplicação de GITT para a EPP, afim de usa-la como *solver* do problema discretizado por diferenças finitas obtido.

Posteriormente testa-se a outra abordagem que consiste em aplicar as transformadas desenvolvidas para todo o sistema de equações, e suas respectivas condições de contorno, somente na direção  $x$ . Desta forma o equacionamento dependente apenas de  $y$  pode ser discretizado por diferenças finitas.

### 3.1 Equação da pressão de Poisson.

Como em Salih (2013), em um primeiro momento serão tratadas as equações que modelam fisicamente a CHD. Partindo do equacionamento de Navier Stokes para um caso bidimensional e incompressível (Equações 1 e 2) é possível obter a equação da pressão de Poisson EPP.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{termo convectivo}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \underbrace{\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}_{\text{termo difusivo}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}}_{\text{termo convectivo}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \underbrace{\left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)}_{\text{termo difusivo}} \quad (2)$$

Para tal derivamos a equação 1 em relação a x e a equação 2 em relação a y.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + v \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 u) \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + v \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 v) \quad (4)$$

Soma-se então as equações (3) e (4).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\ = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + v \left[ \frac{\partial (\nabla^2 u)}{\partial x} + \frac{\partial (\nabla^2 v)}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

No lado esquerdo da equação 5 é facilmente observado que alguns termos compõem a equação da continuidade e podem ser eliminados por resultarem em soma nula.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

Rearranjado o lado direito da equação (5), concluí-se que o termos com gradiente compõem a equação da continuidade e portanto também são nulos.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (8)$$

Desta forma é possível simplificar a equação (5)

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

É possível ainda rearranjar o lado direito da equação (9)

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (10)$$

Feitas as substituições encontramos uma equação elíptica que é conhecida na literatura (SALIH, 2013) como Equação da pressão de Poisson EPP (11). A equação possui uma propriedade muito importante na resolução dos problemas de transporte de massa permitindo o acoplamento das velocidades u e v com a pressão p. Vale lembrar que é válida somente para fluxos incompressíveis.

$$\nabla^2 p = 2\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (11)$$

### 3.2 Diferenças finitas aplicada à CHD

Uma vez determinado o equacionamento, pode-se partir para a aproximação das equações (1), (2) e (11) pelo modelo de diferenças finitas e desta forma ocorre a discretização do sistema de estudo.

O processo de discretização das dimensões de estudo é base fundamental de grande parte dos modelos numéricos. Para tal faz-se a partição de sistemas contínuos e isso implica em obtenção de resultados também discretos, ou seja resolve-se o problema em certa quantidade de pontos, volumes ou elementos. A dimensão espacial da cavidade hidrodinâmica será discretizada com  $n_x$  divisões na direção  $x$  e  $n_y$  divisões na direção  $y$ . Deste modo, fica aparente na Figura 2 que teremos uma malha com distância horizontal entre os nós de comprimento  $dx$ , e de forma análoga  $dy$  para a vertical.

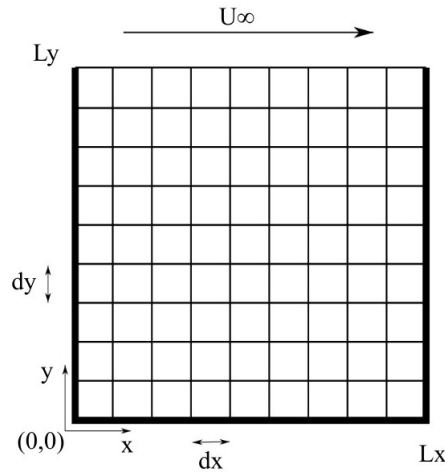


Figura 2 – Discretização espacial da CHD.

Como pode ser visto na Figura 3, cada nó da malha representa um ponto  $g$ , de modo que a localização dos pontos na malha será representada pelos índices  $i$  e  $j$ . Fica evidente que para o sistema apresentado tem-se um domínio com os seguintes limites:  $0 \leq i \leq Lx$  e  $0 \leq j \leq Ly$ . É comum a utilização das propriedades  $u$ ,  $v$  deslocadas e posicionadas entre os nós, todavia o presente trabalho considerará as variáveis  $u$ ,  $v$  e  $p$  centradas nos pontos, afim de facilitar o entendimento.

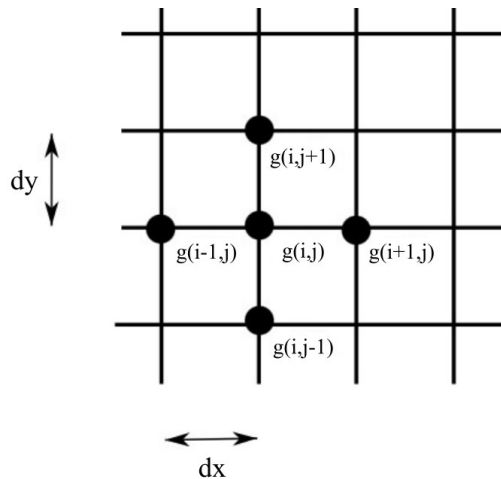


Figura 3 – Comportamento dos índices para os nós vizinhos ao nó  $g(i, j)$ .

Em LeVeque (2007) é possível encontrar os procedimentos para aplicar diferenças finitas, em suas mais variadas aproximações para equações diferenciais ordinárias e parciais. Dentre as várias opções para lidar com as derivadas temporais, optou-se pela aproximação via método de Euler de primeira ordem. A escolha se justifica pois permite obter uma informação de velocidade para tempo  $n + 1$  de forma direta. No decorrer do trabalho se tornará mais clara a importância desta decisão para construção do algoritmo.

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{i,j}^{n+1} \simeq \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{dt} \quad (12)$$

Para os termos convectivos foi utilizada a discretização para trás (*Backward Difference Scheme*) e diferenciação centrada. Ao discretizar os termos de velocidades contidos na equação da pressão de Poisson a aproximação centrada demonstra melhor resultado, ou seja, a convergência ocorre para um número de iterações menor. Tal observação é justificada

pois o acoplamento dos termos é mais robusto. Quanto aos termos de pressão nas equações (10) e (11), a diferenciação centrada se faz necessária, pois ao aplicar as condições de contorno mantém-se a integridade física do PVI.

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,j}^n \simeq \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{dx} \quad (13)$$

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i,j}^n \simeq \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2dx} \quad (14)$$

É necessária uma estratégia para lidar com a não linearidade característica dos termos convectivos de velocidade. Ainda em LeVeque (2007), é detalhado sobre as aproximações para equações não lineares. Para tal, optou-se por uma estratégia simplificada, onde foram aproximadas as multiplicações substituindo o termo multiplicador da derivada pelo valor da propriedade centrada no ponto de estudo.

$$u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} \simeq u_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{dx} \quad (15)$$

Já para os termos difusivos, onde é comum a presença de derivadas de segunda ordem, foi utilizada discretização centrada. Da mesma forma foi realizada a aproximação para os termos de pressão contidos na EPP.

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{i,j}^n \simeq \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{dx^2} \quad (16)$$

De maneira análoga são feitas as discretizações para os termos derivados em relação a direção y.

Para os termos simultaneamente derivados em x e em y a discretização é realizada da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v^n}{\partial y} \simeq \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2dx} \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2dy} \quad (17)$$

Substituindo as aproximações nas equações de Navier-Stokes.

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{dt} + u_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{dx} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{dy} = \frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{dx} + v \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2 * u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{dx^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{dy^2} \right) \quad (18)$$

$$\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{dt} + u_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n}{dx} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{dy} = \frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{dy} + v \left( \frac{v_{i+1,j}^n - 2 * v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{dx^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2 * v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{dy^2} \right) \quad (19)$$

Observando as equações discretizadas, é fácil perceber o motivo de utilizarmos a aproximação de Euler avançada. A presença dos termos de velocidade em n+1 permitem que seja calculada uma nova velocidade que obedece fisicamente a expressão original. O erro associado é relacionado com a distância entre os pontos, ou seja pode ser controlado sendo inversamente proporcional ao comprimento de dx e dy.

Os termos do tipo  $u_{i-1,j}^n$ ,  $u_{i+1,j}^n$ ,  $u_{i,j-1}^n$  e  $u_{i,j+1}^n$  causam interferência nas fronteiras da cavidade. Não é possível calcular os pontos para  $x = 0$  e  $x = Lx$ , nem os pontos  $y = 0$ , e  $y = Ly$ , pois seriam demandados valores fora do campo de estudo e de sentido físico nulo. Para contornar este impasse, o algoritmo proposto irá resolver as equações 18 e 19 somente para os pontos internos. Esta escolha é conveniente, pois nos pontos colados nas paredes pode-se aplicar as condições de contorno da problemática.

Para os termos de velocidade, temos as seguintes condições de contorno de Dirichlet:

Em u:

$$u_{i,Ly}^n = 1; \quad u_{i,0}^n = 0; \quad u_{0,j}^n = 0; \quad u_{Lx,j}^n = 0$$

Em v:

$$v_{i,Ly}^n = 0; \quad v_{i,0}^n = 0; \quad v_{0,j}^n = 0; \quad v_{Lx,j}^n = 0$$

Já tem-se uma maneira sólida de utilizar a igualdade de N-S para cada dt, obtendo uma nova velocidade em  $n + 1$ . Todavia é necessário também resolver o campo de pressão devido ao acoplamento das variáveis. Apesar da equação (11) compor o sistema de equações e ser possível obter solução a partir dela, optaremos por usar a equação (5) mantendo o primeiro termo, desta forma a solução evolui de maneira mais estável. Esta abordagem contorna um problema encontrado ao implementar o *solver* da EPP, utilizando diretamente a equação (11) observou-se dificuldade de convergência. Ao verificar se os valores obtidos satisfaziam a equação da continuidade, percebeu-se que alguma influencia oscilatória ocorria sobre as velocidades.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \quad (20)$$

Faz-se a discretização da equação (20)

$$\begin{aligned} \frac{1}{dt} \left( \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2dx} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2dy} \right) + \left( \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2dx} \right)^2 + \left( \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2dy} \right)^2 + 2 \left( \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2dy} \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2dx} \right) \\ = \frac{1}{\rho} \left( \frac{p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n}{dx^2} + \frac{p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n}{dy^2} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

As condições de contorno para a pressão são diferentes do que encontramos para a velocidade. Nas paredes fixas da cavidade, temos condições de Neumann, ou seja, com valor específico para a derivada. Percebe-se então a necessidade de utilizar a aproximação centrada para os termos de pressão, desta forma é possível impor a condição de contorno da parede tornando a variação nula entre os pontos adjacentes. Para parede móvel, tem-se condição de Dirichlet com pressão relativa nula, uma vez que a face está sujeita a pressão do ambiente.

$$p_{i,0}^n = 0; \quad \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i,0}^n = 0; \quad \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{0,j}^n = 0; \quad \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \right]_{Lx,j}^n = 0; \quad (22)$$

As condições de contorno de Neumann são aplicadas fazendo:

$$p_{i,0}^n = p_{i,2}^n; \quad p_{Lx,j}^n = p_{Lx-2,j}^n; \quad p_{0,j}^n = p_{2,j}^n; \quad (23)$$

### 3.3 Solver de aproximação por diferenças

De posse das definições feitas, pode-se estruturar um algoritmo simples para solucionar o problema. Foi utilizado uma sistema de convergência iterativo para determinar o campo de pressão para cada intervalo de tempo. O algoritmo PRIME (**PR**essão **Imp**lícita, **MO**mento **Exp**lícito) descrito sucintamente em Rocho e Rosa (2012) pode ser adaptado e aplicado no equacionamento obtido.

Como as velocidades  $u^{n+1}$  e  $v^{n+1}$  são calculadas de forma direta pelas equações 18 e 19, determina-se o lado esquerdo da equação (5) que definimos como  $p\_rhs$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{dt} \left( \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2dx} + \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2dy} \right) + \left( \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2dx} \right)^2 + \left( \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2dy} \right)^2 \\ + 2 \left( \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2dy} \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2dx} \right) = p\_rhs \end{aligned} \quad (24)$$

A parte esquerda da equação nos permite isolar  $p_{i,j}^n$  e com isso calcular a pressão. Para tal repetimos o cálculo da pressão corrigindo-a a cada nova iteração.

$$p_{i,j} = \frac{dy^2(pn_{i,j+1} + pn_{i,j-1}) + dx^2(pn_{i+1,j} + pn_{i-1,j})}{2(dx^2 + dy^2)} - \frac{dx^2 dy^2}{2(dx^2 + dy^2)} p\_rhs \quad (25)$$

Onde  $pn$  é a pressão da iteração anterior. O *solver* resolve a EPP até que a igualdade  $p\_rhs = \nabla^2 p$  seja satisfeita.

#### 3.3.1 Critérios de convergência e aproximação

Como critério de parada utiliza-se diferença da norma da matriz de pressão entre  $n$  e  $n-1$  pelo método de Frobenius. Determinou-se o erro máximo  $\varepsilon$  como  $E - 8$  tornando a solução com variação próxima a da precisão de máquina  $\varepsilon = E - 8$ . Em caso de divergência, ou dificuldade em convergir, o algoritmo interrompe as iterações em um número suficientemente alto. O numero de iterações final para cada passo de tempo é monitorado ao longo da execução da simulação uma vez que é fundamental para a precisão dos resultados.

$$\|p\| - \|pn\| \leq \varepsilon \quad (26)$$

Descrito em Johnston e Liu (2002) e Francisquetti (2010), e de forma resumida, o método PRIME possui estabilidade na convergência se está de acordo com as seguintes definições:

1. Estabilidade difusiva do fluxo:

$$\Delta t \leq \frac{Re}{2} \left[ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right]^{-1} \quad (27)$$

2. Estabilidade convectiva do fluxo:

$$|u_{max}| \Delta t < \Delta x \quad e \quad |v_{max}| \Delta t < \Delta y \quad (28)$$

O critério de estabilidade convectiva é obtido através do Número de Courant-Friedrichs-Lewy, amplamente conhecido na literatura por indicar o fluxo de informação transferida entre os pontos, elementos ou volumes da malha discretizada.

Desta forma obtemos um  $\Delta t$  que assegure estabilidade na convergência:

$$\Delta t \leq \tau \min \left( \frac{Re}{2} \left[ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right]^{-1}, \frac{\Delta x}{u_{max}}, \frac{\Delta y}{v_{max}} \right) \quad (29)$$

Onde  $\tau$  é um fator de segurança relacionado a convergência, para o seguinte trabalho utilizou-se  $\tau = 0,5$ .

### 3.3.2 Estrutura do algoritmo

O método PRIME permite desenvolver um algoritmo com a seguinte estrutura:

1. Inicializa as variáveis
2. Enquanto  $t < tmax$ 
  - 2.1 Determinar p\_ rhs;
  - 2.2 Enquanto  $\|p\| - \|pn\| \geq \varepsilon$ 
    - 2.2.1 Calcula a pressão p
    - 2.2.2 Aplica as CC para pressão
  - 2.3 Calcula  $u^{n+1}$
  - 2.4 Calcula  $v^{n+1}$
  - 2.5 Aplica as CC para  $u^{n+1}$  e  $v^{n+1}$ ;

### 3.4 Aplicando técnica da transformada integral generalizada (GITT) na EPP

Nesta seção aplicaremos a técnica de GITT na EPP, afim de encontrar uma nova forma de resolver o campo de pressão. O método se propõe a utilizar a GITT, visto que, com ela é possível obter uma equação transformada que apresenta potencial de resolver a parte mais frágil e instável das demais alternativas de *solvers*.

#### 3.4.1 Adimensionalização do equacionamento

Algumas tratativas analíticas são convenientes ao aplicar a técnica de GITT, dentre elas a adimensionalização das variáveis. Para tal, busca-se encontrar uma propriedade física que possua a mesma unidade de medida, porém com grandeza escalar constante ou conhecida. No presente trabalho as variáveis adimensionais foram descritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} U(X, Y, T) &= \frac{u(x, y, t)}{u_\infty}; \\ V(X, Y, T) &= \frac{v(x, y, t)}{u_\infty}; \\ Y &= \frac{y}{LY}; \\ X &= \frac{x}{LX}; \\ LX &= \frac{Lx}{Ly}; \\ LY &= 1; \\ T &= \frac{U_\infty t}{Ly}; \\ P &= \frac{p}{\rho(u_\infty)^2}. \end{aligned} \quad (30)$$



### 3.4.2 Aplicando GITT na direção y

Logo, determina-se a equação da pressão de Poisson, bem como as condições iniciais e de contorno adimensionais.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = 2\rho \left( \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \quad (31)$$

É fácil perceber que há três variáveis dependentes,  $P$ ,  $U$  e  $V$  com condições de contorno conhecidas. Dentre a metodologia da GITT, descrita em Wortmann (2003) é necessário selecionar o problema de autovalor auxiliar associado ao problema de Sturm-Liouville.

Problema auxiliar genérico  $I''(z) + (\mu^z)I(z) = 0$

Para o problema auxiliar escolhido sabe-se que a solução é da forma:  $I(z) = e^{\alpha z} A \text{sen}(\beta z) + B \text{cos}(\beta z)$ , com  $\alpha = 0$  e  $\beta = \pm \mu^z$ .

Definido o problema auxiliar de autovalor genérico, é possível aplicar as condições de contorno para determinar as autofunções normalizadas, bem como os respectivos autovalores. É importante perceber que para a pressão tem-se condições de contorno de Neumann, já para os termos de velocidade as condições de contorno são as de Dirichlet.

Problema auxiliar para a pressão com condições de contorno (CC) de Neumann:

$$\Lambda_i(y) = B_i^p \text{cos}(\mu_i^p y); \begin{cases} B_i^p = \sqrt{\frac{1}{LY}}; \mu_i^p = 0; & \text{para } i = 1; \\ B_i^p = \sqrt{\frac{2}{LY}}; \mu_i^p = \frac{i-1}{LY} \pi; & \text{para } i = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (32)$$

Já para as velocidades  $U$  e  $V$  respectivamente:

$$\Psi_i(y) = A_i^u \text{sen}(\mu_i^u y); A_i^u = \sqrt{\frac{2}{LY}}; \mu_i^u = \frac{i\pi}{LY}; i = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

$$\Phi_i(y) = A_i^v \text{sen}(\mu_i^v y); A_i^v = \sqrt{\frac{2}{LY}}; \mu_i^v = \frac{i\pi}{LY}; i = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

De posse das autofunções  $\Psi_i(y)$ ,  $\Phi_i(y)$  e  $\Lambda_i(y)$  e dos autovalores  $\mu_i^p$ ,  $\mu_i^u$  e  $\mu_i^v$ , tem-se uma base para o espaço em que os operadores estão contidos, sendo possível expandir em somatório as variáveis e definir os pares transformadas-inversas. De forma resumida, as transformadas da GITT decompõem as variáveis dependentes em duas parcelas, sendo uma destas contida na base desenvolvida no problema auxiliar e a outra parte mantém a demais dimensões não transformadas. Será demonstrado brevemente o procedimento para a obtenção do par para a pressão na direção y. Seguindo os procedimentos descritos em Cotta (1993), as demais transformadas são obtidas de forma análoga, portanto não serão esmiuçadas.

Aproxima-se a variável pressão em somatório das parcelas  $\Lambda_i(Y)$  e  $\tilde{P}$

$$P(X, Y, T) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{P}_i(X, T) \Lambda_i(Y) \quad (35)$$

Onde  $\tilde{P}$  é a pressão transformada que depende das demais variáveis não transformadas não dependentes.

Multiplica-se a equação por  $\Lambda_j(Y)$ , integrando em  $Y$  com limites  $[0, LY]$ , ao reorganizar os termos obtém-se:

$$\int_0^{LY} P(X, Y, T) \Lambda_j(Y) dY = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{P}_i(X, T) \underbrace{\left( \int_0^{LY} \Lambda_i(Y) \Lambda_j(Y) dY \right)}_{\text{termo ortonormal}} \quad (36)$$

Nesta etapa utiliza-se a propriedade da ortonormalidade Necati e Özişik (1993). Fica evidente que a escolha dos autovalores deve compor um sistema ortonormal juntamente com as autofunções.

$$\int_0^{LY} \Lambda_i(Y) \Lambda_j(Y) dY = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (37)$$

Logo:

$$\int_0^{LY} P(X, Y, T) \Lambda_j(Y) dY = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{P}_i(X, T) \delta_{ij} = \tilde{P}_i(X, T) \quad (38)$$

E os pares transformada-inversa são:

$$\tilde{P}_i(X, T) = \int_0^{LY} P(X, Y, T) \Lambda_j(Y) dY \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Transformada}) \quad (39)$$

$$P(X, Y, T) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{P}_j(X, T) \Lambda(Y)_j dY \quad (\text{Transformada inversa}) \quad (40)$$

De forma similar determina-se os pares para  $U$  e  $V$  ainda na direção  $y$ .

$$\tilde{U}_i(X, T) = \int_0^{LY} U(X, Y, T) \Psi_i(Y) dY \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Transformada}) \quad (41)$$

$$U(X, Y, T) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{U}_i(X, T) \Psi(Y)_i dY \quad (\text{Transformada inversa}) \quad (42)$$

$$\tilde{V}_j(X, T) = \int_0^{LY} V(X, Y, T) \Phi_j(Y) dY \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Transformada}) \quad (43)$$

$$V(X, Y, T) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{V}_j(X, T) \Phi(Y)_j dY \quad (\text{Transformada inversa}) \quad (44)$$

Definidas as transformadas e inversas necessárias para direção  $y$ , a próxima etapa é aplica-las na equação 28. Para tal, inicia-se multiplicando a equação 28 por  $\Lambda_i(Y)$ , e a equação característica do problema auxiliar por  $P(X, Y, T)$ . Tal procedimento pode ser observado em detalhes em Cenedese (2005).

$$\Lambda_i(Y) \left( \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} \right) = \Lambda_i(Y) \left( \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \quad (45)$$

$$P \frac{\partial^2 \Lambda_i(Y)}{\partial Y^2} + P (\mu_i^u)^2 \Lambda_i(Y) = 0 \quad (46)$$

Somando as equações 42 e 43 e aplicando o operador integral

$$\underbrace{\int_0^{LY} \Lambda_i(Y) \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} dY}_A + \underbrace{\int_0^{LY} \Lambda_i(Y) \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} dY}_B = \underbrace{\int_0^{LY} \Lambda_i(Y) \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial Y} dY}_C + \underbrace{\int_0^{LY} \Lambda_i(Y) \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} dY}_D + \underbrace{\int_0^{LY} P \frac{\partial^2 \Lambda_i(Y)}{\partial Y^2} dY}_E + \underbrace{\int_0^{LY} P (\mu_i^u)^2 \Lambda_i(Y) dY}_F \quad (47)$$

Ao analisar as integrais, verifica-se as identidades.

$$B - E = 0; \quad A = \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial X^2}; \quad F = (\mu_i^u)^2 \tilde{P} \quad (48)$$

$\tilde{P}$  é o termo da pressão transformado independente da direção  $Y$ . Para C e D aplica-se as transformadas 38 e 40.

$$C = \int_0^{LY} \Lambda_i(Y) \frac{\partial \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{U}_j(X, T) \Psi(Y)_j}{\partial X} \frac{\partial \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{V}_j(X, T) \Phi(Y)_j}{\partial Y} dY \quad (49)$$

$$D = \int_0^{LY} \Lambda_i(Y) \frac{\partial \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{V}_j(X, T) \Phi(Y)_j}{\partial X} \frac{\partial \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{U}_j(X, T) \Psi(Y)_j}{\partial Y} dY \quad (50)$$

Separa-se os termos determináveis dos dependentes.

$$C = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_j(X, T)}{\partial X} \tilde{V}_j(X, T) \quad (51)$$

$$D = \sum_{j=1}^{\infty} R_{ij} \frac{\partial \tilde{V}_j(X, T)}{\partial X} \tilde{U}_j(X, T) \quad (52)$$

Onde

$$Q_{ij} = \int_0^{LY} \Lambda_i(Y) \Psi(Y)_j \frac{\partial \Phi(Y)_j}{\partial Y} dY \quad (53)$$

$$R_{ij} = \int_0^{LY} \Lambda_i(Y) \Phi(Y)_j \frac{\partial \Psi(Y)_j}{\partial Y} dY \quad (54)$$

$Q$  e  $R$  são integráveis e portanto podem ser determinados. Ademais, pode-se escrever a equação resultante do procedimento na forma:

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial X^2} - (\mu_i^u)^2 \tilde{P} = \sum_{j=1}^{\infty} \left( Q_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_j(X, T)}{\partial X} \tilde{V}_j(X, T) - R_{ij} \frac{\partial \tilde{V}_j(X, T)}{\partial X} \tilde{U}_j(X, T) \right) \quad (55)$$

### 3.4.3 Aplicando GITT na direção x

De posse das equação transformada na direção y, será realizado o procedimento para a direção x. Faz-se tal manipulação, afim de obter uma expansão direta que resolva o campo de pressões. Como pode ser analisado a EPP transformada em y e elimina a derivativa de segunda ordem em y, devido a escolha sensata do problema auxiliar. Da mesma forma será feito, porém se fazem necessárias novas transformadas para a direção x que são definidas de forma análoga as feitas anteriormente, são elas:

$$Z_m(x) = B_m^p \cos(\lambda_m^p x); B_m^p = \begin{cases} B_m^p = \sqrt{\frac{1}{LX}}; \lambda_m^p = 0 & \text{para } m = 1 \\ B_m^p = \sqrt{\frac{2}{LX}}; \lambda_m^p = \frac{m-1}{LX} \pi & \text{para } m = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (56)$$

$$\tilde{P}_m(T) = \int_0^{LX} \tilde{P}(X, T) Z_m(X) dX \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Transformada}) \quad (57)$$

$$\tilde{P}(X, T) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{P}_m(T) Z_m(X) dX \quad (\text{Transformada inversa}) \quad (58)$$

Onde  $Z_m(x)$  e  $B_m^p$  são as autofunções e os autovalores respectivamente, e  $\tilde{P}_m(T)$  é a pressão transformada para y e x.

$$\Xi_m(x) = A_m^u \text{sen}(\lambda_m^u x); A_m^u = \sqrt{\frac{2}{LX}}; \lambda_m^u = \frac{m\pi}{LX}; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (59)$$

$$\tilde{U}_m(T) = \int_0^{LX} \tilde{U}(X, T) \Xi_m(X) dX \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Transformada}) \quad (60)$$

$$\tilde{U}(X, T) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{U}_m(T) \Xi_m(X) dX \quad (\text{Transformada inversa}) \quad (61)$$

Onde  $\Xi_m(x)$  e  $\lambda_m^u$  são as autofunções e os autovalores respectivamente, e  $\tilde{U}_m(T)$  é a velocidade  $U$  transformada para y e x.

$$\Theta_m(x) = A_m^v \text{sen}(\lambda_m^v x); A_m^v = \sqrt{\frac{2}{LX}}; \lambda_m^v = \frac{m\pi}{LX}; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (62)$$

$$\tilde{V}_m(T) = \int_0^{LX} \tilde{V}(X, T) \Theta_m(X) dX \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Transformada}) \quad (63)$$

$$\tilde{V}(X, T) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{V}_m(T) \Theta_m(X) dX \quad (\text{Transformada inversa}) \quad (64)$$

Onde  $\Theta_m(x)$  e  $\lambda_m^v$  são as autofunções e os autovalores respectivamente, e  $\tilde{V}_m(T)$  é velocidade  $V$  transformada para y e x. Seguindo os mesmo procedimentos da transformação em y, multiplicamos a equação 52 por  $Z_m(X)$  e a equação característica do problema auxiliar por  $\tilde{P}$ .

$$Z_m(X) \left( \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial X^2} - (\mu_i^u)^2 \tilde{P} = \sum_{j=1}^{\infty} \left( Q_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_j(X, T)}{\partial X} \tilde{V}_j(X, T) - R_{ij} \frac{\partial \tilde{V}_j(X, T)}{\partial X} \tilde{U}_j(X, T) \right) \right) \quad (65)$$

$$\tilde{P} \frac{\partial^2 Z_m(Y)}{\partial Y^2} + \tilde{P} (\lambda_m^u)^2 Z_m(Y) = 0 \quad (66)$$

As equações são somadas e é aplicado o operador integral.

$$\underbrace{\int_0^{LX} Z_m(X) \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial X^2} dX}_A - \underbrace{\int_0^{LX} Z_m(X) \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial Y^2} (\mu_i^u)^2 dX}_B = \underbrace{\int_0^{LX} \sum_{j=1}^{\infty} Z_m(X) Q_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_j(X, T)}{\partial X} \tilde{V}_j(X, T) dX}_C - \quad (67)$$

$$\underbrace{\int_0^{LX} \sum_{j=1}^{\infty} Z_m(X) R_{ij} \frac{\partial \tilde{V}_j(X, T)}{\partial X} \tilde{U}_j(X, T) dX}_D + \underbrace{\int_0^{LX} \tilde{P} \frac{\partial^2 Z_m(X)}{\partial X^2} dX}_E + \underbrace{\int_0^{LX} \tilde{P} (\lambda_m^u)^2 Z_m(X) dX}_F$$

Simplificando os termos:

$$A - E = 0 \quad (68)$$

$$B = (\mu_i^u)^2 \bar{P}(t) \quad (69)$$

$$F = (\lambda_m^u)^2 \bar{P}(t) \quad (70)$$

Para os termos  $C$  e  $D$  substitui-se as velocidades  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$  por suas expansões transformadas equação 57 e 60.

$$C = \int_0^{LX} \sum_{j=1}^{\infty} Z_m(X) Q_{ij} \frac{\partial \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{U}_j(T) \Xi_m(X)}{\partial X} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{V}_j(T) \Theta(X) dX = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{ij} S_{ij} \tilde{U}_j(T) \tilde{V}_j(T) \quad (71)$$

$$D = \int_0^{LX} \sum_{j=1}^{\infty} Z_m(X) R_{ij} \frac{\partial \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{V}_j(T) \Theta_m(X)}{\partial X} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{U}_j(T) \Xi(X) dX = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} R_{ij} G_{ij} \tilde{V}_j(T) \tilde{U}_j(T) \quad (72)$$

Onde

$$S_{nm} = \int_0^{LX} \frac{\partial \Xi_m(X)}{\partial X} \Theta(X) Z_m(X) dX \quad (73)$$

$$G_{nm} = \int_0^{LX} \frac{\partial \Theta_m(X)}{\partial X} \Xi(X) Z_m(X) dX \quad (74)$$

$S$  e  $G$  são integráveis e portanto podem ser determinados. Está portanto definida a equação da pressão de Poisson adimensionalizada transformada nas direções  $X$  e  $Y$ .

$$\bar{P}_{jm} = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (Q_{ij} S_{nm} \tilde{U} \tilde{V} - R_{ij} G_{nm} \tilde{V} \tilde{U})}{(\mu_i^p)^2 - (\lambda_m^p)^2} \quad (75)$$

Com reversão

$$P(X, Y, T) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{P}_{jm}(T) Z_m(X) \Lambda_j(Y) \quad (76)$$

Ao analisar a equação obtida, percebe-se que devido a semelhança das transformadas  $\Theta_m(X)$ ,  $\Xi_m(X)$ ,  $\Phi(Y)$ ,  $\Psi(Y)$ , juntamente com a simetria da equação 31 proporcionam somente a resposta trivial  $\bar{P}_{jm} = 0$ . Para contornar tal problema aplicou-se com as mesmas transformadas GITT pra a Equação 5, estratégia similar a realizada na aplicação do método de diferenças finitas proposto. Utilizou-se o mesmo problema auxiliar, visto que o mesmo se aplica perfeitamente ao escopo do novo problema. A partir de tal estratégia, foi possível determinar uma nova EPP transformada e sua inversa.

$$\bar{P}_{jm} = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (DA_{ij} DA_{1nm} \tilde{U}^2 + DB_{ij} DB_{1nm} \tilde{V}^2 - DC_{ij} DC_{1nm} \tilde{V} \tilde{U})}{(\mu_i^p)^2 - (\lambda_m^p)^2} \quad (77)$$

Com reversão

$$P(X, Y, T) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{P}_{jm}(T) Z_m(X) \Lambda_j(Y) \quad (78)$$

Onde:

$$DA_{ij} = \int_0^{LY} \Psi_j(Y)^2 \Lambda_i(Y) dY$$

$$DA_{1nm} = \int_0^{LX} \frac{\partial \Xi_n(X)}{\partial X} Z_m(X) dX$$

$$DB_{ij} = \int_0^{LY} \left( \frac{\partial \Phi_j(Y)}{\partial Y} \right)^2 \Lambda_i(Y) dY$$

$$DB_{1nm} = \int_0^{LX} \Theta_n(X)^2 Z_m(X) dX$$

$$DC_{ij} = \int_0^{LY} \frac{\partial \Psi_j(Y)}{\partial Y} \Phi_j(Y) \Lambda_i(Y) dY$$

$$DC_{1nm} = \int_0^{LX} \frac{\partial \Theta_n(X)}{\partial X} \Xi_n Z_m(X) dX$$

Para ambos os casos, seria pertinente se perguntar como é possível obter uma equação transformada sem aplicação direta de condições de contorno que modele fisicamente o PVI. Em Cotta (1993) é possível perceber que a resposta está no fato das condições de contorno serem usadas para obter os coeficientes  $A$  e  $B$  das funções de transformação para  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{V}$  e  $\bar{P}$ . Desta forma as informações das condições de contorno são implícitas na equação deduzida.

### 3.5 Aplicando GITT para direção X nas equações de N-S e EPP

A partir desta seção, será aplicada outra metodologia para o problema, desta vez para todo o sistema será aplicada as transformadas de GITT na direção X. Com isso vai ser aproximado o sistema resultante com diferenças finitas na direção restante. Como dito em Wortmann (2003), ao aplicar a técnica em problemas não lineares, a característica não linear é transportada para o problema transformado. Em suma é esperado um conjunto de equações compondo um sistema não linear, podendo este ser resolvido numericamente.

O problema auxiliar já demonstrado se aplica perfeitamente às equações do momento para a velocidade tangencial adimensionalizada  $U$  e velocidade transversal adimensionalizada  $V$ , desta forma, novamente serão usadas as transformadas das equações 56 até 64. Os pares adimensionais também são aproveitados e aplicados. Uma vez que a abordagem é diferente da vista na seção 3.3 e 3.4 e que o regime é estacionário, não faz mais sentido manter o termo temporal no equacionamento.

#### 3.5.1 Transformada da equação do momento U

O procedimento para as transformadas já foram bem detalhados e seguem os passos da seção 3.4.2. Todavia devido a diferença do equacionamento e a presença de não linearidades, o material descrito em Wortmann (2003) se demonstrou fundamental na execução. Dito isso, primeiramente será aplicada a transformada  $\Xi(X)$  na equação 1 adimensionalizada e sem a presença do termo derivativo temporal.

$$\left( U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \right) \Xi_j(X) \quad (79)$$

Integrando no intervalo  $[0, LX]$  e aplicando as transformadas em  $U$ ,  $V$  e  $P$ , obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \tilde{U}_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \tilde{V}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial Y} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik} \tilde{P}_k + \frac{1}{Re} \left( \sum_{i=1}^{\infty} d_i \tilde{U}_i + \sum_{i=1}^{\infty} e_i \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial Y^2} \right) \quad (80)$$

Os coeficientes são integráveis e portanto conhecidos:

$$\begin{aligned} a_i &= \int_0^{LX} \frac{\partial \Xi_i(X)}{\partial X} \Xi_{ii}(X) dX \\ b_i &= \int_0^{LX} \Theta_j(X) \Xi_i(X) \Xi_{ii}(X) dX \\ c_i &= \int_0^{LX} \frac{\partial Z_k(X)}{\partial X} \Xi_{ii}(X) dX \\ d_i &= \int_0^{LX} \frac{\partial^2 \Xi_i(X)}{\partial X^2} \Xi_{ii}(X) dX \\ e_i &= \int_0^{LX} \Xi_i(X) \Xi_{ii}(X) dX \end{aligned}$$

Tem-se então uma equação transformada onde a única variável implícita é  $Y$ . As condições de contorno também são transformadas:

$$U|_{y=0} = 0 \rightarrow \int_0^{LX} U \Xi_i(X) dX|_{y=0} = 0 \therefore \tilde{U}|_{y=0} = 0 \quad (81)$$

$$U|_{y=LY} = U^\infty \rightarrow \int_0^{LX} U \Xi_i(X) dX|_{y=LY} = U^\infty \therefore \tilde{U}|_{y=LY} = U^\infty \int_0^{LX} \Xi_i(X) dX \quad (82)$$

#### 3.5.2 Transformada da equação do momento V

Para a equação do momento para a velocidade  $V$ , aplica-se a transformada  $\Theta_{jj}(X)$ .

$$\left( U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \right) \Theta_{jj}(X) \quad (83)$$

Integrando no intervalo  $[0, LX]$  e aplicando as transformadas em  $U$ ,  $V$  e  $P$ , obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a a_{ij} \tilde{U}_i \tilde{V}_j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b b_{ij} \tilde{V}_j \frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial Y} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c c_{jk} \frac{\partial \tilde{P}_k}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left( \sum_{i=1}^{\infty} d d_j \tilde{V}_j + \sum_{i=1}^{\infty} e e_j \frac{\partial^2 \tilde{V}_j}{\partial Y^2} \right) \quad (84)$$

Os coeficientes são integráveis e portanto conhecidos:

$$\begin{aligned}
aa_{ij} &= \int_0^{LX} \frac{\partial \Theta_j(X)}{\partial X} \Xi_i(X) \Theta_{jj}(X) dX \\
bb_j &= \int_0^{LX} \Theta_j(X) \Theta_j(X) \Theta_{jj}(X) dX \\
cc_{jk} &= \int_0^{LX} Z_k(X) \Theta_{jj}(X) dX \\
dd_j &= \int_0^{LX} \frac{\partial^2 \Theta_j(X)}{\partial X^2} \Theta_{jj}(X) dX \\
ee_j &= \int_0^{LX} \Theta_j(X) \Theta_{jj}(X) dX
\end{aligned}$$

Aos passos de Wortmann (2003), as condições de contorno que envolvem a componente da velocidade descomposta também são transformadas, e devem ser aplicadas ao sistema não linear resultante.

$$V|_{y=0} = 0 \rightarrow \int_0^{LX} V \Theta_j(X) dX|_{Y=0} = 0 \therefore \tilde{V}|_{Y=0} = 0 \quad (85)$$

$$V|_{y=LY} = 0 \rightarrow \int_0^{LX} V \Theta_j(X) dX|_{Y=LY} = 0 \therefore \tilde{V}|_{Y=LY} = 0 \quad (86)$$

### 3.5.3 Transformando a EPP em X

Diferentemente do que foi feito anteriormente, a EPP será transformada somente em X. Para tal aplica-se a transformada  $Z_{kk}(X)$ .

$$\left( \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) Z_{kk}(X) \quad (87)$$

Aplicando as transformadas em X para U, V e P, obtém-se a ultima equação que compõe o sistema que modela o problema da cavidade hidrodinâmica.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \tilde{P}_k + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{\partial \tilde{P}_k}{\partial Y} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_{ijk} \tilde{U}_i \frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial Y} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l_{ijk} \tilde{V}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial Y} \quad (88)$$

Os coeficientes são integráveis e portanto conhecidos:

$$\begin{aligned}
f_k &= \int_0^{LX} \frac{\partial^2 Z_k(X)}{\partial X^2} Z_{kk}(X) dX \\
g_k &= \int_0^{LX} Z_k(X) Z_{kk}(X) dX \\
h_k &= \int_0^{LX} \frac{\partial \Xi_i(X)}{\partial X} \Theta_j(X) Z_{kk}(X) dX \\
l_k &= \int_0^{LX} \Xi_i(X) \frac{\partial \Theta_j(X)}{\partial X} Z_{kk}(X) dX
\end{aligned}$$

Com condições de contorno transformadas conforme as equações 89 e 90.

$$\frac{\partial P}{\partial Y}|_{y=0} = 0 \rightarrow \int_0^{LX} \frac{\partial P}{\partial Y} Z_{kk}(X) dX|_{Y=0} = 0 \therefore \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y}|_{Y=0} = 0 \quad (89)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y}|_{y=LY} = 0 \rightarrow \int_0^{LY} \frac{\partial P}{\partial Y} Z_{kk}(X) dX|_{Y=LY} = 0 \therefore \frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y}|_{Y=LY} = 0 \quad (90)$$

Como descrito por Cotta (1993), é possível portanto truncar a expansão para um numero  $NN$  suficiente para garantir a precisão desejada. Desta forma é proposto aplicar diferenças finitas nas equações transformadas, com isso obtém-se um sistema não linear capaz de prover solução ao problema da CHD.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{NN} a_i \tilde{U}_i^2(Y) + \sum_{i=1}^{NN} \sum_{j=1}^{NN} b_{ij} \tilde{V}_j(Y) \frac{\tilde{U}_i(Y-1) - \tilde{U}_i(Y+1)}{2dY} &= \sum_{i=1}^{NN} \sum_{k=1}^{NN} c_{ik} \tilde{P}_k(Y) + \\
\frac{1}{Re} \left( \sum_{i=1}^{NN} d_i \tilde{U}_i(Y) + \sum_{i=1}^{NN} e_i \frac{\tilde{U}_i(Y+1) - 2\tilde{U}_i(Y) + \tilde{U}_i(Y-1)}{dY^2} \right) &
\end{aligned} \quad (91)$$

$$\sum_{i=1}^{NN} aa_{ij} \tilde{U}_i(Y) \tilde{V}_j(Y) + \sum_{i=1}^{NN} \sum_{j=1}^{NN} bb_j \tilde{V}_j(Y) \frac{\tilde{V}_j(Y-1) - \tilde{V}_j(Y+1)}{2dY} = \sum_{i=1}^{NN} \sum_{k=1}^{NN} cc_{jk} \frac{\tilde{P}_k(Y+1) - \tilde{P}_k(Y-1)}{2dY} + \frac{1}{Re} \left( \sum_{i=1}^{NN} dd_j \tilde{V}_j(Y) + \sum_{i=1}^{NN} ee_j \frac{\tilde{V}_j(Y+1) - 2\tilde{V}_j(Y) + \tilde{V}_j(Y-1)}{dY^2} \right) \quad (92)$$

$$\sum_{k=1}^{NN} f_k \tilde{P}_k(Y) + \sum_{k=1}^{NN} g_k \frac{\tilde{P}_k(Y+1) - \tilde{P}_k(Y-1)}{2dY} = \sum_{i=1}^{NN} \sum_{j=1}^{NN} \sum_{k=1}^{NN} h_{ijk} \tilde{U}_i(Y) \frac{\tilde{V}_j(Y-1) - \tilde{V}_j(Y+1)}{2dY} - \sum_{i=1}^{NN} \sum_{j=1}^{NN} \sum_{k=1}^{NN} l_{ijk} \tilde{V}_j(X) \frac{\tilde{U}_i(Y-1) - \tilde{U}_i(Y+1)}{2dY} \quad (93)$$

As reversões para retomar as variáveis dependentes são:

$$U(X, Y) = \sum_{i=1}^{NN} \tilde{U}_i(Y) \Xi_i(X) dX$$

$$V(X, Y) = \sum_{j=1}^{NN} \tilde{V}_j(Y) \Theta_j(X) dX$$

$$P(X, Y) = \sum_{k=1}^{NN} \tilde{P}_k(Y) Z_k(X) dX$$

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados obtidos serão apresentados referentes aos três escopos tratados neste trabalho. Durante o desenvolvimento foi de suma importância aplicar o algoritmo PRIME no problema discretizado por diferenças finitas. Tal abordagem permitiu maior propriedade para os avanços da execução mista GITT-diferenças finitas proposta.

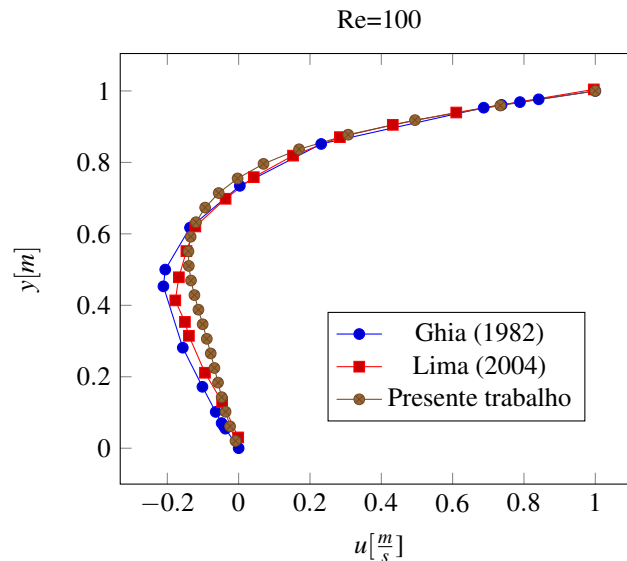
### 4.1 Diferenças finitas com algoritmo PRIME

Como citado anteriormente, o problema da Cavidade Hidrodinâmica possui vasta gama de resultados para *benchmark*, os resultados apresentados neste trabalho serão comparados aos resultados obtidos em Ghia e Shin (1982) e Silva et al. (2005) para  $Re = 100$  e  $Re = 400$ . O próximo valor de Reynolds simulado com dados na literatura é  $Re = 1000$ , porém ao executar o algoritmo para esta situação não foi possível convergir para a solução. Especula-se que a aproximação via diferenças finitas de primeira ordem não proporciona acoplamento necessário para captar as variações ágeis provenientes da menor viscosidade do fluido. Outra possibilidade de divergência é a simplicidade do *solver* que não possui atualizações das velocidades dentro dos passos de tempo como é possível verificar em métodos mais robustos.

y	Velocidade u (Re=100)			Velocidade u (Re=400)		
	Ghia	Lima	Presente trabalho	Ghia	Lima	Presente trabalho
1	1.0116	0.970144	1.0067	0.9776	0.983	1.0064
0.95	0.66594	0.646368	0.664509	0.564625	0.555065	0.772739
0.9	0.420265	0.407804	0.406858	0.350291	0.329606	0.549989
0.85	0.243921	0.238483	0.216974	0.250058	0.21996	0.35467
0.8	0.115024	0.117036	0.080787	0.204927	0.166897	0.194957
0.75	0.018633	0.029808	-0.01341	0.17657	0.132966	0.072792
0.7	-0.05488	-0.03256	-0.07529	0.142924	0.097432	-0.01425
0.6	-0.15356	-0.11807	-0.13213	0.029526	-0.00413	-0.1051
0.5	-0.20112	-0.1509	-0.13613	-0.12555	-0.12516	-0.12908
0.4	-0.20354	-0.15269	-0.11621	-0.25833	-0.21179	-0.12966
0.3	-0.17	-0.1262	-0.08892	-0.31174	-0.22834	-0.12589
0.2	-0.11744	-0.07883	-0.06185	-0.26756	-0.17936	-0.11176
0.1	-0.06254	-0.02703	-0.03517	-0.14934	-0.09424	-0.07136
0	-0.001	-0.00023	-0.0015	0.0038	0.0254	-0.0097

Tabela 1 – Velocidades longitudinais  $u$  para  $x = 0, 5$ . Dados obtidos em: (GHIA; SHIN, 1982) e (SILVA et al., 2005)

Na tabela 1 são apresentados os dados dos *benchmarks* escolhidos, bem como os valores obtidos pela execução do algoritmo descrito na seção 3.3 do texto. Ao analisar os dados obtidos, foi possível determinar que erro máximo entre a solução de Ghia e Shin (1982) e do presente trabalho foi menor do que 3, 5% e 17% do valor  $u_\infty$  para números de Reynolds de 100 e 400 respectivamente. Os valores apresentados por Silva et al. (2005) quando comparados aos do presente trabalho relatam erros menores do que 4, 5% e 12% do valor  $u_\infty$  também para Reynolds de 100 e 400 respectivamente.

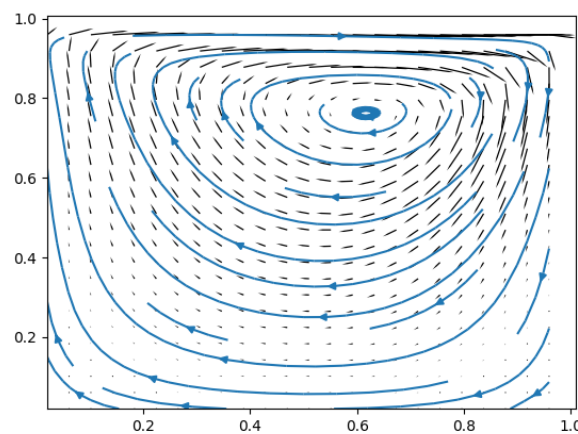


**Figura 4** – Gráfico da velocidade  $u$  em  $x = 0.5$

É importante ressaltar que a malha utilizada de 50 por 50 nós é grosseira quando comparada ao que se encontra na literatura, tal propriedade também influencia nos resultados obtidos. Pode ser visto em Ghia e Shin (1982) que o mesmo usa uma malha de 129 por 129 elementos, já em Silva et al. (2005) a discretização é de 161 por 161 elementos de malha.

É possível observar que o comportamento das simulações para  $Re=100$  Figura 4 possui leve divergência dos resultados obtidos em Ghia e Shin (1982) principalmente na metade inferior da cavidade ( $y < 0.5$ ), todavia a diferença é menos expressiva quando comparada aos resultados de Silva et al. (2005). Ao analisar simultaneamente o campo vetorial Figura 5, percebe-se que há dificuldade na propagação convectiva das velocidades. Tal característica pode se dar devido a escolha de discretização por diferenças para trás e centrada de primeira ordem. Outro fator é a forma com que foram discretizadas as não linearidades  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  e  $v \frac{\partial u}{\partial x}$  (exemplificando para a equação do momento  $u$ ) há outras metodologias que lidam de forma mais eficaz com os termos não lineares característicos de processos convectivos.

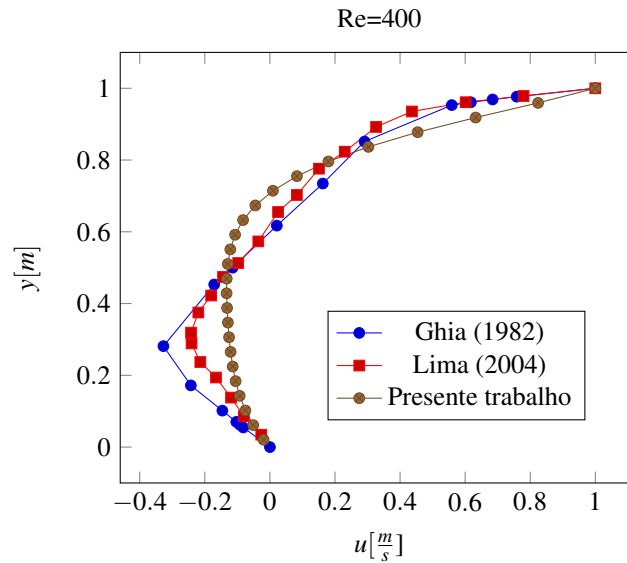
Ao observar as figuras 6 e 7, e ao fato de não ser possível obter resposta para  $Re=1000$  fica evidente que o procedimento possui limitações para obter dados de forma satisfatória e equivalente as apresentadas pelos *benchmarks* mais encontrados na literatura. Vale apontar que para os escoamentos analisados os campos vetoriais Figuras 5 e 7 são similares aos visualizados em Rocho e Rosa (2012), todavia em Rocho e Rosa (2012) não foi proposta validação dos resultados com *benchmarks*.



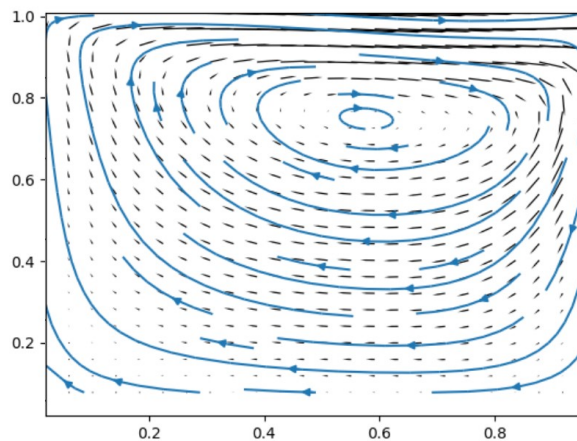
**Figura 5** – Campo vetorial e linhas de fluxo para  $Re = 100$ ,  $dt = 0.0052$ , tempo final de 2.6 segundos e malha  $50 \times 50$ .



Devido as limitações do método, não é possível observar os vórtices secundários bem como algumas peculiaridades características como as descritas em Botella e Peyret (1998). É sabido que diferenças finitas não é amplamente utilizada em aplicações complexas para escoamento de fluidos, sendo muito mais eficiente em problemas térmicos.



**Figura 6** – Gráfico da velocidade  $u$  em  $x = 0.5$



**Figura 7** – Campo vetorial e linhas de fluxo para  $Re = 400$ ,  $dt = 0.005$ , tempo final de 2.75 segundos e malha  $50 \times 50$ .

## 4.2 Métodos híbridos GITT-Diferenças finitas

Ao passo que o modelo de diferenças finitas aplicado é funcional, precisando somente de ajustes para situações mais específicas, serão apresentadas as considerações referentes aos modelos híbridos de GITT e diferenças finitas estudados.

### 4.2.1 EPP transformada como solução direta para o problema discretizado por Diferenças finitas

As equações 77 e 78 poderiam ser utilizadas para calcular diretamente a pressão para cada  $dt$ , tornando o solver menos iterativo e mais analítico. Para tal seria preciso resolver o sistema resultante das equações 18, 19 e 77. Porém ao tentar desenvolver tal estimativa, não foi encontrada maneira eficaz de fazer os valores de  $u^{n+1}$  e  $v^{n+1}$  já discretizados atuarem na EPP transformada equação 77. Mesmo sendo exequível obter diretamente  $u_{i,j}^{n+1}$  e  $v_{i,j}^{n+1}$  pelas equações 18 e 19, o formato discreto e dependente dos passos para  $x$  e  $y$  tornaram inviável a solução.

Seria portanto necessário uma etapa intermediária entre a resolução das equações 18 e 19 e a obtenção da pressão pelas equações 77 e 78. Tal etapa teria que aproximar o equacionamento discreto por contínuo sem agregar erro numérico significativo. Ademais, possivelmente a abordagem funcionaria em aplicações onde no sistema de equações  $U$  e  $V$  são diretamente obtidos por equações integráveis e constantes. Todavia, como dito, não foi encontrada forma eficiente de dar seguimento à abordagem proposta.

#### 4.2.2 Aplicação de GITT na direção X para todo o sistema de equações

Na seção 3.5 obteve-se um sistema de equações transformado cujo as equações discretizadas 91, 92, 93, juntamente com as condições de contorno 81, 82, 85, 86, 89 e 90 formam o sistema não linear que modela fisicamente o problema da cavidade hidrodinâmica. Pode-se então aplicar um método numérico como, por exemplo, Gauss Seidel ou Newton Raphson para resolução. Após é necessário expandir as variáveis  $U$ ,  $V$  e  $P$  novamente para suas formas primitivas e dimensionais, realizando as reversões propostas.

É interessante perceber que a expansão das variáveis em autovetores e autovalores gera um sistema não mais de variáveis implícitas bidimensional. Apesar do sistema depender fisicamente somente de  $Y$ , as expansões em  $i$ ,  $j$ , e  $k$  gerarão parcelas das variáveis  $U$ ,  $V$  e  $P$  que compõem o sistema não linear. Com isso, o sistema cresce de forma cúbica a medida que truncamento  $NN$  das expansões é ampliado.

## 5 CONCLUSÕES

Ao longo do trabalho foi possível estabelecer maior conexão entre métodos numéricos e espectrais. Percebeu-se que técnicas robustas como diferenças finitas e GITT podem de maneiras completamente diferentes obter soluções para um mesmo problema. Ficou evidente também a vastidão de abordagens dentro de cada técnica elevando abruptamente as possibilidades de qualquer abordagem mista.

Normalmente os trabalhos na área de solução de problemas por métodos espectrais transformam completamente as equações e resolvem numericamente o sistema resultante. Em alguns casos até mesmo a resolução do sistema é de forma analítica via transformada de Laplace. No estudo realizado, buscou-se alternativas aos métodos estritamente aplicados, abrindo a possibilidade do desenvolvimento de métodos onde é possível extrair as melhores características de cada técnica. Por exemplo, utilização de GITT permite funções complexas como condições de contorno, ou mesmo perfis de velocidade sem a necessidade de discretização das mesmas. Já Diferenças finitas permite uma evolução temporal mais simples analiticamente e mais trabalhosa numericamente. Aplicar as técnicas em conjunto em situações onde o escoamento progride com perfil complexo em uma direção e se desenvolve vagarosamente em outra pode ser uma estratégia assertiva.

As metodologias propostas foram tratadas de forma simplificada ao longo do trabalho uma vez que cada etapa possui extenso desenvolvimento teórico e aplicado na literatura. Mesmo assim, entende-se que o desenvolvimento das etapas consegue transmitir um ponto de partida a futuros trabalhos. Como sugestão de continuidade a expansão das equações desenvolvidas na seção 3.5 bem como a resolução do sistema e obtenção dos resultados validaria todo o procedimento exposto na seção.

A tentativa de desenvolvimento do *solver* para a EPP via transformada integral generalizada, seção 3.4, fica pendente de uma abordagem que permita a melhor comunicação das técnicas. Apesar de parte dos métodos não exporem os resultados esperados, o presente trabalho cumpre com seu objetivo de aproximar e mesclar técnicas de resolução em problemas de fenômenos do transporte. Foi possível contribuir com tratativas não habituais no problema da cavidade hidrodinâmica, que como dito é um importante problema de validação para CFD. Visto que o crescimento da demanda de CFD é inegável, com taxa de crescimento tal qual ao avanço da tecnologia, o presente trabalhos permitiu desenvolver acesso a abordagens mistas que podem ser aperfeiçoadas dentro de fenômenos dos transportes, bem como desenvolvidas em outras áreas da engenharia.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares e namorada, pelo amor, incentivo e paciência.

Ao professor Sérgio Wortmann eu agradeço a orientação e a confiança que tornaram possível a realização deste trabalho, bem como o desenvolvimento pessoal que ampliaram a forma de encerrar a vida e carreira profissional.

À instituição – IFRS Campus Farroupilha que me proporcionou a oportunidade de possuir um ensino superior de exímia qualidade e a expansão de meus horizontes.

As colaborações da banca avaliadora que foi de suma importância no polimento do trabalho.

## ABSTRACT

Gabriel Smaniotto Slomp, gabrislomp@gmail.com<sup>1</sup>  
Sérgio Wortmann, sergio.wortmann@farroupilha.ifrs.edu.br<sup>1</sup>

<sup>1,2</sup>Instituto Federal do Rio Grande do Sul, Campus Farroupilha. Av. São Vicente - Cinquentenário, Farroupilha - RS, 95180-000.

**Abstract:** *In this work some attempts are proposed to merge the Generalized Integral Transform Technique GITT with the finite difference method applied to the lid driven cavity problem. Starting from the momentum equations for  $u$  and  $v$ , the Poisson pressure equation EPP is developed, to compose the system of equations to be worked on. In possession of this equations, three methodologies are proposed. First is the direct application of finite differences with the PRIME solver. Second is the application of GITT in the EPP in order to use it as a solver step without the need for an iterative method. Finally, the third approach transforms the entire system composed of EPP and moment equations for  $U$  and  $V$  velocity in the  $X$  direction with GITT, later applying finite differences in the  $Y$  direction in order to obtain a nonlinear system that provides the solution.*

**Keywords:** *lid driven cavity, GITT, Finite Differences, CFD, Hybrid methods, Poisson pressure equation*

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BERGAMO; FERNANDES, L. **Instabilidade hidrodinâmica linear do escoamento compressível em uma cavidade**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013.
- BOTELLA, O.; PEYRET, R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. **Computers Fluids**, v. 27, n. 4, p. 421–433, 1998. ISSN 0045-7930. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793098000024>>.
- CENEDESE, E. Solução das equações de burgers e de navier-stokes bidimensionais utilizando a técnica da transformada integral generalizada. **Ilha Solteira: Universidade Estadual Paulista**, 2005.
- COTTA, R. M. **Integral transforms in computational heat and fluid flow**. [S.l.]: CRC Press, 1993.
- CURI et al. Alternative integral transform solution of the transient incompressible navier-stokes equations in primitive variables formulation. In: **15th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering ENCIT 2014**. [S.l.: s.n.], 2014. p. 10–13.
- FRANCISQUETTI, E. P. Estudo de quadrees para uso de dinâmica de fluidos computacional. 2010.
- GHIA, K. N.; SHIN, C. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 387–411, 1982.
- GUIGON et al. Computational optimization for integral transform algorithms applied to the lid-driven cavity flow problem. **Revista de Engenharia Térmica**, v. 6, n. 1, p. 104–113, 2007.
- JOHNSTON, H.; LIU, J.-G. Finite difference schemes for incompressible flow based on local pressure boundary conditions. **Journal of Computational Physics**, v. 180, n. 1, p. 120–154, 2002. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999102970798>>.
- KUHLMANN, H. C.; ROMANÒ, F. The lid-driven cavity. **Computational Modelling of Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics**, Springer, p. 233–309, 2019.
- LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems**. [S.l.]: SIAM, 2007.
- MORAN, M. J.; SHAPIRO, H. N.; BOETTNER, D. D. **Princípios de termodinâmica para engenharia**. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.
- NECATI, M.; ÖZİŞİK. **Heat conduction**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1993.
- ROCHO; ROSA, V. da. Métodos iterativos para a solução da equação de poisson. 2012.
- SALIH, A. Streamfunction-vorticity formulation. **Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach**, p. 10, 2013.
- SILVA et al. Integral transform solution of the navier–stokes equations in full cylindrical regions with streamfunction formulation. **International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering**, Wiley Online Library, v. 26, n. 11, p. 1417–1434, 2010.
- SILVA et al. Large eddy simulation of turbulent incompressible fluid flows by a nine-nodes control volume-finite element method. **Revista de Engenharia Térmica**, v. 4, n. 2, p. 173–180, 2005.
- WORTMANN, S. Formulação semi-analítica para a equação transformada resultante da aplicação da gitt em problemas difusivos-advectivos. 2003.