INSTITUTO FEDERAL
Rio Grande do Sul
Campus Osório

JOSÉ DOMINGOS MEIRA TRUYLIO

A ARITMÉTICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS: PROPOSTA DE ENSINO DAS TERNAS PITAGÓRICAS NO ENSINO BÁSICO

OSÓRIO
2019

JOSÉ DOMINGOS MEIRA TRUYLIO

A ARITMÉTICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS: PROPOSTA DE ENSINO DAS TERNAS PITAGÓRICAS NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para conclusão do curso superior de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof.º Me. Josias Neubert Savóis

Coorientador: Prof.º Me. Sérgio Guilherme Santos Portella

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul

Campus Osório

Curso Superior de Licenciatura em Matemática

OSÓRIO

2019

TERMO DE APROVAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal do Rio Grande do Sul campus Osório.

Prof°. Me. Josias Neubert Savóis
IFRS – *campus* Osório

Prof°. Me. Ricardo Silva Ribeiro
IFRS – *campus* Restinga

Prof°. Dr. Guilherme Ferreira Monteiro
IFRS – *campus* Osório

Osório, ____ de dezembro de 2019

"Ficaram arreios suados e o silêncio de esporas
Um cerne com cor de aurora queimando em fogo e chão
Uma cuia e uma bomba recostadas na cambona
E uma saudade redomona pelos cantos do galpão."
Luiz Marenco

Aos colegas

"Veio a cantiga da noite na garupa do aguaceiro, cabresteado pelo vento..."
Luiz Menezes

Ao meu pai

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos descritos aqui não são apenas relacionados ao desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso, mas também de todo o período da graduação.

Agradeço primeiramente a Deus, pelas oportunidades da vida.

Agradeço aos meus pais, pela formação básica e pelo amor ao longo da vida.

Agradeço à Andréia Ribeiro Dias, meu amor e minha esposa, pela compreensão e companheirismo.

Agradeço ao meu cunhado Edgar José de Lima Junior, pela compreensão, disponibilidade e apoio que de forma compreensiva e altruísta permitiram a realização integral desse curso.

Agradeço às colegas Mariana Nunes Barato e Raira Rössner da Silva pela amizade e parceria ao longo desses quatro anos de graduação.

Agradeço aos professores do Instituto Federal do Rio Grande do Sul, aos que fazem parte do atual corpo docente e aos que já não fazem mais parte, que ao longo do curso foram partes importantes nesse processo de formação e transformação pelo qual passei.

Mas devo agradecer em especial a alguns professores: ao professor Eron Magno Aguiar pela contribuição do tema desenvolvido neste trabalho. Ao professor Sérgio Guilherme Santos Portella, coorientador desse trabalho, pela amizade, pelas conversas dentro e fora de sala de aula e também pelas contribuições com sua grande sabedoria. E ao professor Josias Neubert Savóis, orientador deste trabalho, que a cada aula demonstra sua dedicação e paixão pela matemática e ensino, bem como pela aprendizagem dos seus alunos. Ao professor Josias, agradeço pela amizade, pelo aceite de ser orientador, pela compreensão não só durante a realização deste trabalho, mas também durante todo o curso de licenciatura, pois tenho certeza que sem ele este trabalho não poderia ser realizado.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta didática sobre as ternas pitagóricas aos professores do ensino básico, propondo uma análise e aplicação de alguns conceitos aritméticos presentes neste conteúdo, assim como uma abordagem concreta através da manipulação e construção do tijolo de Euler. Ao longo do texto, propõe-se diversas etapas e relações para abordagem e desenvolvimento do tema, estando sob a responsabilidade do professor, que por ventura procurar se referenciar nesse trabalho, relacionar com o currículo vigente da escola onde atua. Inicialmente se desenvolve o contexto histórico de Pitágoras e seus alunos, seguido do próprio Teorema de Pitágoras e suas demonstrações. Na sequência se apresentam as ternas pitagóricas diferenciando-as em primitivas e não primitivas, para que durante a construção do trabalho sejam estudadas suas propriedades matemáticas, e suas relações aritméticas com as multiplicidades de alguns números naturais. O conceito e as especificidades do tijolo de Euler se apresentam durante as propostas pedagógicas. Por fim, o texto estrutura-se em forma de uma sequência didática visando o ensino da aritmética das ternas pitagóricas.

Palavras-chave: teorema de Pitágoras. ternas pitagóricas. aritmética.

ABSTRACT

This work aims to provide a didactic proposal about Pythagorean triples to elementary school teachers, proposing an analysis and application of some arithmetic concepts present on theme, as well as a concrete approach using the manipulation and construction of Euler's brick. Throughout, fixes many stages and relationships in order to approach and develop the theme, being under the responsibility of the teacher who may try to refer this work to the current curriculum of the school where he works. Initially, the historical context of Pythagoras and her students is developed, followed by Pythagorean Theorem and its demonstrations. Following, the Pythagorean triples are presented, differentiating them into primitive and non primitive ones, in order that its mathematical properties and their arithmetic relations with the multiplicity of some natural numbers can be studied. The concept and the specificities of Euler's brick are presented among the pedagogical proposals. Finally, the text is structured as a didactic sequence aimed the arithmetic teaching of the Pythagorean triples.

Keywords: Pythagorean theorem. Pythagorean triples. Arithmetic.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELA

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Ao longo dos quatro anos de estudos no curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande Sul – IFRS – *Campus* Osório tivemos contato com duas áreas de estudos com enfoques distintos, mas complementares para a formação integral dos futuros docentes de matemática: a matemática acadêmica e o ensino de matemática. Ao falarmos de matemática acadêmica estamos fazendo referência ao estudo dos conteúdos de matemática de determinadas áreas, tanto da matemática da Educação Básica como a abordada exclusivamente no Ensino Superior, através de uma abordagem formal e aplicada, onde, por meio das demonstrações dos conceitos, propriedades, teoremas e da utilização das ferramentas matemáticas em aplicações na resolução de problemas intra e interdisciplinar é possível perceber a importância dos estudos avançados dessa ciência e sua aplicabilidade nas mais diversas áreas de conhecimento, contribuindo para a evolução intelectual do indivíduo bem como também da sociedade de maneira geral. Dentre estas áreas da matemática que estudamos na licenciatura podemos citar Álgebra Linear, Geometria Analítica, Cálculo, Equações Diferenciais, Análise Combinatória e Probabilidade, Álgebra e Aritmética.

Já no que tange o ensino de matemática, visando à formação didático-pedagógica para a prática docente, realizamos estudos sobre Didática da matemática e Metodologias para o ensino de matemática, uso de tecnologias, jogos e atividades lúdicas em sala de aula, História da Matemática e Tendências em educação matemática. Alinhado a isso, a união entre o embasamento teórico sobre como ensinar matemática para crianças e adolescentes, as práticas de laboratório envolvendo produção de material e sequências didáticas sobre conteúdos de matemática e a realização de atividades práticas docentes ao longo do curso, principalmente nas disciplinas de Estágio Supervisionado, possibilitaram a construção de uma visão ampla sobre o que é ser professor nos tempos atuais e o que é ou deveria ser ensinar matemática nas escolas da educação básica.

Estas duas vertentes que surgem na formação do professor, que em alguns momentos parecem distintas, acabam deixando lacunas ou gerando problemas na formação do futuro docente que, segundo Lima (2007):

> Basicamente, o problema mais grave no treinamento do futuro professor é o seguinte: quando o jovem entra na faculdade, não teve uma boa formação na escola, logo não conhece bem a Matemática que vai ensinar. Por sua vez, as aulas que tem na faculdade tratam de Cálculo, Variáveis Complexas, Equações Diferenciais e outros assuntos que ele bravamente, com grande esforço, tenta assimilar em dose mínima para ser aprovado no exame. No fim de tudo, recebe seu diploma sem ter domínio das coisas que vai ensinar a seus alunos, como decimais infinitas, as proposições básicas da Geometria no Espaço, Divisibilidade, Análise Combinatória, etc. (LIMA, 2007, p. 172).

Alinhado a isso, Lima (2007, p. 172) comenta que segundo o educador matemático George Polya, esta situação não é peculiar ou percebida somente nos países subdesenvolvidos, pois segundo ele:

> [...] Na Universidade, o futuro professor recebe uma ração de sopa rala, sem carne alguma, no Departamento de Educação e um bife duro, que não consegue mastigar, no Departamento de Matemática. (LIMA, 2007, p. 172).

De modo simplificado, o que queremos mostrar é que os conhecimentos adquiridos através do estudo de uma matemática formal, abstrata e carregada de generalizações, pode ser ensinado e aplicado em níveis em que existe a necessidade de desenvolver uma matemática mais concreta, simples, direta e específica. Portanto, considerando o formalismo matemático e as metodologias de ensino de matemática aprendidos e desenvolvidos ao longo do curso, nos questionamos se seria possível desenvolver atividades de ensino na educação básica utilizando a matemática formal estudada no ensino superior. Como este questionamento muito amplo torna difícil a construção de uma resposta satisfatória, começamos a delimitar o tema que serviria como ponto de partida para a realização deste trabalho. Assim, após analisar os conteúdos de matemática previstos na grade curricular da educação básica e que são estudados nos cursos de graduação e levando em conta o interesse, afinidade e compreensão que adquirimos sobre este assunto ao longo do curso, surgiu a intenção de se trabalhar conceitos aritméticos no ensino básico, desenvolvendo-os a partir de um tema e possibilitando diferentes abordagens e adaptações de acordo com os níveis que forem aplicados tais conceitos, e com isso a seguinte problematização a ser pesquisada: é viável, durante o ensino do teorema de Pitágoras, abordar os conceitos e curiosidades aritméticas que surgem nas ternas pitagóricas? Ou seja, refazendo a pergunta, é possível ensinar conceitos de Aritmética (ou Teoria dos Números) na educação básica através da análise dos ternos pitagóricos?

Diante deste problema, desenvolvemos este trabalho que poderá ajudar professores de matemática que trabalham na educação básica a realizarem uma abordagem pouco comum no ensino do teorema de Pitágoras e das ternas pitagóricas, possibilitando uma compreensão mais profunda do teorema de Pitágoras além da sua interpretação geométrica e também a ampliação do estudo dos conceitos de aritmética desenvolvidos no ensino fundamental acerca dos números naturais e números inteiros.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é elaborar uma proposta de ensino das ternas pitagóricas na educação básica, com foco no ensino médio, abordando os conceitos aritméticos implícitos nestas ternas e que podem ser desenvolvidos a partir da compreensão do Teorema de Pitágoras.

Especificamente definimos os seguintes objetivos:

- Analisar o contexto histórico do Teorema de Pitágoras e a sistematização do pensamento dada pela escola pitagórica;
- Mostrar a relação entre geometria e álgebra em algumas demonstrações do teorema que podem ser ensinadas na educação básica;
- Conceituar e demonstrar as restrições para a produção de ternas pitagóricas;
- Estudar as propriedades das ternas pitagóricas, relacionando a geometria do triângulo retângulo com a aritmética abstrata introduzida pelos gregos.

1.3 JUSTIFICATIVA

Durante a realização dos estágios supervisionados, tivemos contato com alunos da educação básica, desde turmas do 6º ano do ensino fundamental até 3º ano do ensino médio. Ao entrarmos em sala de aula, percebemos a importância de relacionar conteúdos abordados no curso de Licenciatura em Matemática com questões que façam sentido ao aluno resolver, ou que ainda possua uma lógica matemática acessível ao discente. É em sala de aula que verificamos a necessidade de vincularmos intrinsicamente a matemática acadêmica com o ensino de matemática.

Ao realizar o Estágio Supervisionado I, tivemos a oportunidade de trabalhar com potenciação e radiciação de números naturais em uma turma de 6º ano. Ao realizar o

Estágio Supervisionado III, o conteúdo que foi definido para o trabalho era geometria espacial, com foco no ensino de paralelepípedos retângulos e prismas retos. Ao nos depararmos com os cálculos de diagonais das faces de um paralelepípedo retângulo e da diagonal deste sólido, e pesquisar sobre os possíveis valores numéricos destes segmentos, tomamos conhecimento do Tijolo de Euler, que se trata de um paralelepípedo retângulo em que as medidas das suas arestas e diagonais das faces são números inteiros. No caso em que a diagonal principal do paralelepípedo também for um número inteiro, este tijolo é chamado de tijolo de Euler perfeito. Até o momento, contudo, não se tem conhecimento de um paralelepípedo com esta propriedade. Logicamente, para o cálculo dessas diagonais utilizamos um dos teoremas mais famosos em todo o mundo e um dos mais importantes da matemática: o teorema de Pitágoras. Além disso, os valores x, y, z pertencentes ao conjunto dos números inteiros e que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = z^2$ são conhecidos como ternas pitagóricas, por serem medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Durante a realização desta prática docente de estágio, percebeu-se que os alunos ainda apresentam dificuldades com os cálculos envolvendo operações com números naturais, principalmente nos momentos em que é necessário usar potenciação ou radiciação ou operações inversas. Alinhado a isto, Moreira (2016) destaca que:

> Essas dúvidas e falhas conceituais que aparecem frequentemente entre os alunos podem ser associadas a dois aspectos do processo de aprendizagem escolar dos sistemas numéricos, os quais tendem a se sobrepor. O primeiro aspecto refere-se ao fato de que, do ponto de vista da aprendizagem escolar, a aritmética dos naturais é um tema complexo, e sua apreensão em níveis considerados satisfatórios não se esgota no processo que se desenvolve ao longo das séries iniciais. Assim, o professor terá que lidar com dificuldades de aprendizagem desse tema que, muitas vezes, acompanham o aluno até final o final do Ensino Fundamental. O segundo aspecto refere-se ao processo de acomodação do conhecimento “novo” e de construção de um estágio diferenciado de compreensão do conhecimento “antigo”. (MOREIRA, 2016, pg 49).

Lembrando que a construção do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) é um dos primeiros contatos que a criança tem com a matemática escolar e suas propriedades geralmente são ensinadas no 6º ano do ensino fundamental e desenvolvida durante todas as séries da educação básica, surgiu a inquietação sobre os motivos que geram esta aparente defasagem na compreensão dos números naturais. Neste sentido, Moreira (2016, pg.48) afirma que “o licenciado em Matemática estará retomando e ampliando todo o trabalho com números naturais desenvolvidos nos ciclos anteriores”, mostrando que é imprescindível que o futuro professor desta disciplina esteja preparado para diferentes abordagens utilizando este conjunto numérico, revendo e repensando a sua prática em cada nível de ensino dependendo da complexidade dos conteúdos que devem ser desenvolvidos.

Ainda sobre o ensino das propriedades e operações dos números naturais, Moreira (2016) destaca que:

> Esses números agora serão vistos como elementos de um conjunto que, por exemplo, contém a soma e o produto de quaisquer dois deles, mas não contém sempre a diferença ou a divisão; promover-se-á a percepção de relações entre eles (números primos e compostos, múltiplos, divisores, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum etc.) e eventualmente serão estendidas – num processo pedagógico extremamente complexo – as operações, seus significados e suas propriedades para os inteiros negativos, para os racionais e, a partir destes, para os reais. (MOREIRA, 2016, pg 48).

Sendo assim, trabalhar plenamente as propriedades aritméticas dos números naturais e estendê-las ao conjunto dos números inteiros pode ser uma alternativa eficaz para eliminar a defasagem em matemática que aparece ao longo da vida escolar dos estudantes. Pensando nisso, e considerando a importância da utilização de materiais concretos para realçar de forma significativa o processo de ensino aprendizagem conforme destacam os PCN (BRASIL, 1998), percebemos que poderia ser interessante utilizar o tijolo de Euler, o teorema de Pitágoras e as ternas pitagóricas como pontos de partida para o ensino das propriedades aritméticas dos números inteiros. Mostrar aos alunos que a relação dada por Pitágoras, de que em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, quando admitido apenas valores inteiros de segmentos, expressa, ou pode ser interpretada, como um quadrado perfeito sendo escrito como a soma de outros dois quadrados perfeitos, abre possibilidades para o ensino de uma aritmética mais formal e que pode ser tomada como uma base sólida para grande parte dos conteúdos de matemática estudados na educação básica.

Pensando em elaborar um material acessível aos professores de matemática que atuam na educação básica e que seja realmente aplicável ao ensino de matemática em diferentes níveis, adotamos como metodologia norteadora para a escrita deste trabalho, além da pesquisa bibliográfica descritiva, de acordo com a definição dada por Gil (2002), a construção do ensino da Matemática definido por Lima (2007), onde o mesmo deve ser desenvolvido para abranger três componentes fundamentais, “que chamaremos de Conceituação, Manipulação e Aplicações [...] onde as três são suficientes para assegurar a harmonia do curso e cada uma delas é necessária para o seu bom êxito" (LIMA, 2007, p. 154), que podem ser resumidos em sua essência como:

> A *conceituação* compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo [...]. A *manipulação*, de caráter principalmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado da Matemática assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a música [...]. As *aplicações* são empregos das noções e teorias da matemática para obter resultados, conclusões e previsões que vão desde problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. (LIMA, 2007, p. 154 – 155).

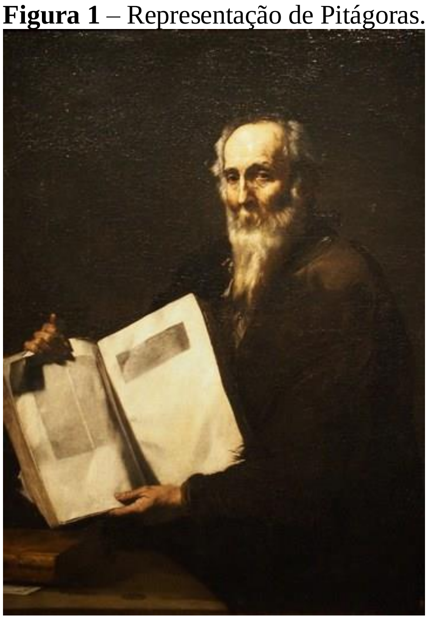
Dialogando com esta estratégia de trabalhar o ensino de Matemática sustentado por este tripé, desenvolveremos um capítulo que busca trazer a historicidade do teorema de Pitágoras e dos pitagóricos à tona, para subsidiar a importância histórica deste tema, outros dois capítulos que buscam revisar os textos de matemática atuais mesclando a conceituação das propriedades matemáticas, formalismo, demonstrações, curiosidades matemáticas e sua inserção no ensino de matemática na educação básica. E por fim, de acordo com a definição de Lima (2007), um capítulo que podemos caracterizar como sendo de aplicação, onde o objetivo é, partindo da conceituação e manipulações sobre tópicos de aritmética e ternas pitagóricas, mostrar as possíveis aplicações ao ensino de matemática, gerando assim uma proposta didática que seja interessante, produtiva e aplicável a qualquer turma do ensino médio e que seja eficaz como material de apoio aos professores de matemática da educação básica.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1. PITÁGORAS E OS PITAGÓRICOS

Segundo Boyer (2010), Pitágoras tem sua história envolta a lendas e fábulas, pois, apesar de terem sido escritas várias biografias naquela época, não se tem um registro histórico preservado sobre sua vida, bem como de todos os 300 primeiros anos da matemática grega. Pelos poucos registros que se tem, Boyer (2010) supõe que Pitágoras nasceu na ilha de Samos por volta do ano 572 antes de Cristo e vivido até aproximadamente 496 antes de Cristo, sendo contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao-Tzu. Ao longo da sua vida viajou por diversos lugares como Egito, Babilônia, Crotona, possivelmente Índia e outras localidades. Durante sua vida, estudou com muitas pessoas, como Anaximandro e Ferécides e alguns autores apontam uma possibilidade de ter estudado com Tales de Mileto, pois havia uma diferença de 50 anos entre os dois e as cidades não eram tão distantes, mas devido à falta de registros não é possível confirmar (EVES, 1995). Pitágoras desenvolveu diversos conhecimentos nas áreas da matemática, música, astronomia, filosofia, religião e outros e acredita-se que os dois primeiros citados acima, Anaximandro e Ferécides, foram influentes na formação filosófica de Pitágoras (STRATHERN, 1998), e que desenvolveu seus conhecimentos matemáticos em sua passagem por Egito e Babilônia (LIMA, 2006).

Figura 1 – Representação de Pitágoras.



Fonte: https://www.guiaestudo.com.br/pitagoras

Segundo Strathern (1998), ao retornar para Samos, a cidade estava passando por um regime político instável, ela estava sendo governada por Polícrates, um temível governante e tirano, que provocava ira não só dos seus oponentes políticos mas também das lideranças das populações das cidades vizinhas, pois além de outros comportamentos, fazia uso da pirataria como forma de adquirir dinheiro e poder. Pitágoras quase fez parte da corte de Polícrates, recebeu convite inclusive, porém ele era um crítico público do governante, e na verdade acreditavam ser uma medida de silenciá-lo. Ele decidiu emigrar para Crotona por volta do ano 530 antes de Cristo. Crotona é uma colônia ao sudeste da Itália que integrava a Magna Grécia. Lá ele fundou a escola pitagórica. Escola essa que perdurou por vários séculos mesmo após sua morte e que possuía muitas peculiaridades. Para muitos historiadores, tinha o caráter de uma seita, algo que lembrava um culto órfico, porém se diferenciava pelas bases matemáticas e filosóficas que possuía. Os alunos que se formavam nessa escola, por adquirir grande conhecimento, acabavam se encaixando nos altos cargos dos governos que regiam a política local.

A escola tinha um caráter de entidade secreta e ao mesmo tempo comunitária (LIMA, 2006), e possuía muitas características excêntricas. Uma de suas bases era acreditar na doutrina da metempsicose, isto é, acreditavam na transmigração da alma, o corpo é mortal, mas alma não. Com isso ao morrer a alma deixa o corpo e se estabelece em outro corpo humano ou animal, até mesmo vegetal. Esse processo está dentro de um ciclo de transformação e purificação da alma. Devido a essa doutrina, os integrantes da escola de Pitágoras, eram vegetarianos. As restrições alimentares não se resumiam a não comer carne, também não comiam feijão (lentilha) e outros grãos.

Assim como era característico na época, toda produção intelectual feita pelos pitagóricos, os alunos da escola, era creditada tudo ao mestre, no caso, Pitágoras (EVES, 1995). Haviam outras particularidades na vida dos pitagóricos, mas acima de tudo era notável o amor que eles tinham pelo conhecimento, principalmente filosofia e matemática. Estas serviam de moral para a conduta dos integrantes. Acreditavam que em todo universo havia uma ordem que dominava e tudo isso era regido por números, a causa ou razão de tudo estava e se representava nos números inteiros (EVES, 1995), por isso o lema “tudo é número”. A crença dos pitagóricos em dizer que tudo no universo era regido por números, fez com que desenvolvessem muito conhecimento nas relações numéricas: números amigáveis, abundantes, perfeitos, deficientes, etc. Esses estudos podem ser considerados como os primeiros passos da teoria dos números estudada até hoje.

Acredita-se que a escola perdurou por vários anos em Crotona, até aproximadamente 300 a.C., onde sofreu um ataque do povo da cidade que acreditava que a escola defendia a aristocracia vigente, e com isso a escola foi destruída. Alguns autores defendem que Pitágoras conseguiu fugir para a cidade de Metaponto, permanecendo lá até sua morte, por volta do ano 496 antes de Cristo.

Como dito em parágrafo anterior, toda criação intelectual era creditada ao mestre, por isso, muito do que se propaga como uma produção do próprio Pitágoras talvez não seja verdadeiramente produto elaborado por ele. Mas isso não desfaz o brilhantismo e a importância do conteúdo para a história.

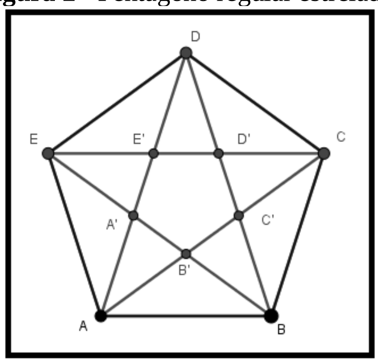
2.2 CRIAÇÕES DA ESCOLA PITAGÓRICA

Neste tópico iremos abordar algumas produções matemáticas da escola pitagórica, porém destacamos que as contribuições dos pitagóricos são inúmeras, não restringindo-se apenas a área da matemática, mas também da astronomia, filosofia e outras mais.. Os itens relacionados abaixo são referenciados nos livros “História da matemática” de Carl Boyer e “Introdução à história da matemática” de Howard Eves.

1. Secção áurea;

   O símbolo principal da escola pitagórica é o pentágono regular estrelado.

Figura 2 - Pentágono regular estrelado.



Fonte: Eves, 1995.

Na figura acima temos um pentágono regular ABCDE, onde através dos seus vértices traçamos as diagonais que se interseccionam nos pontos A' B' C' D' E', formando um novo pentágono. Através dos diversos pares de triângulos semelhantes podemos identificar que os pontos de intersecção dividem as diagonais em uma razão notável.

Tomando, por exemplo, os triângulos semelhantes EE'A e EAC, obtemos a seguinte proporção envolvendo a diagonal EC:

$$\frac{EC}{ED'} = \frac{ED'}{EE'}$$

Segundo Boyer (2010), os pitagóricos chamavam de “divisão de segmento em média e extrema razão”.

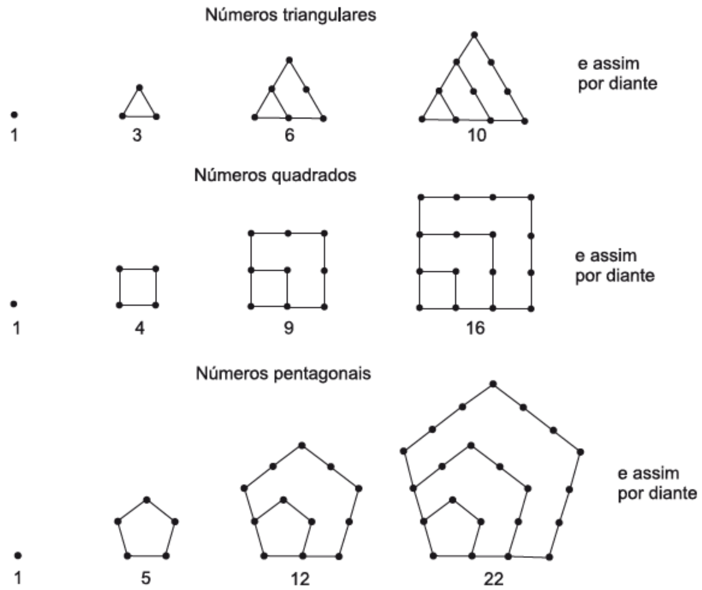
2. Números amigáveis, abundantes, deficientes e perfeitos

Segundo Eves (1995), a descoberta dos números amigáveis, abundantes, deficientes e perfeitos são atribuídos aos pitagóricos. Chamamos dois números de amigáveis quando cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro (se excluindo o próprio outro). Por exemplo 220 e 284: 220 possui os divisores 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110, somando esses valores temos 284. 284 possui os divisores 1, 2, 4, 71 e 142, somando esses valores temos 220. Perceba que ao listarmos os divisores não colocamos os próprios números.

Números perfeitos são aqueles que ao somarmos os seus divisores resulta nele próprio. Por exemplo o 6, os divisores de 6 são 1, 2 e 3: 1 + 2 + 3 = 6. A partir dessa ideia temos os abundantes ou deficientes, que são aqueles que ao somarmos seus divisores resultam em um valor maior ou menor, respectivamente, do que ele próprio. Um número abundante é o número 20, onde seus divisores são 1, 2, 4, 5 e 10, que somados resulta em 22. Um número deficiente por exemplo é o número 8, onde seus divisores são 1, 2 e 4 que somados resulta em 7. Associando essas ideias ao misticismo da seita pitagórica: 6 foram os dias usados por Deus para construção do universo. Toda raça humana descende das 8 almas da arca de Noé. 6 é um número perfeito e 8 é um número deficiente.

3. Números triangulares, quadrados, pentagonais, etc.

Figura 3 - Números triangulares, quadrados e pentagonais



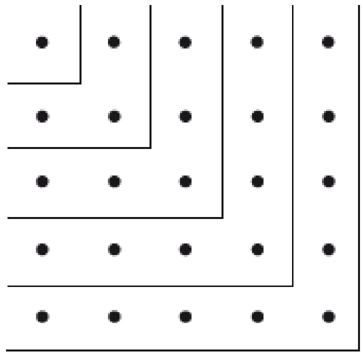
Fonte: EVES, 1995.

Segundo Eves (1995), não há discussão quanto a descoberta dos números figurados, neste tópico representados pelos números triangulares, quadrados e pentagonais.

Relações que podemos identificar nas representações geométricas acima:

- Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos.
- O n-ésimo número pentagonal é igual a n mais três vezes o (n-1)-ésimo número triangular.
- O n-ésimo número quadrado é igual à soma dos n primeiros números ímpares.

Figura 4 – Representação dos números quadrados através dos números ímpares



Fonte: EVES, 1995.

Podemos perceber essas representações geométricas das figuras três e quatro em diversas abordagens quanto ao conteúdo de progressões aritméticas (P.A.), e também costumam estar associadas ao estudo das P.A. de segunda ordem.

4. Números irracionais

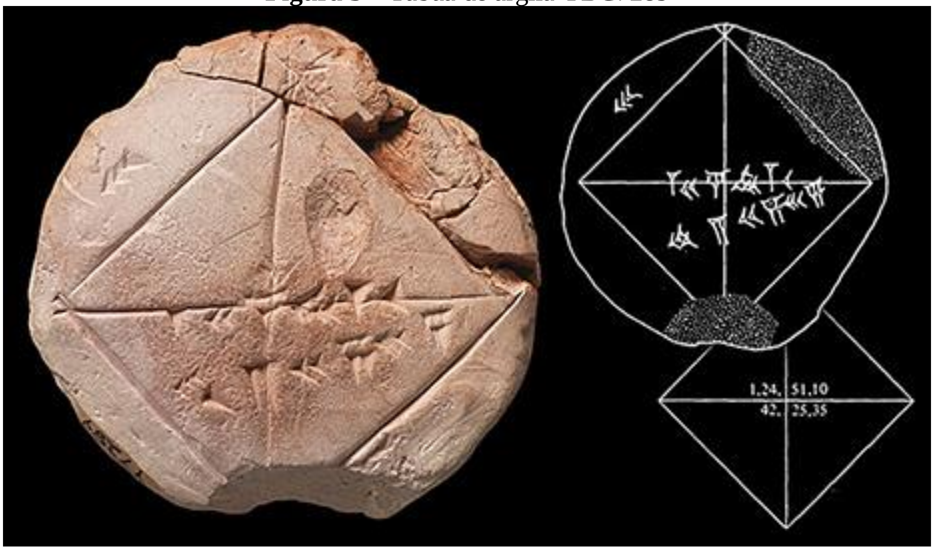
Como já visto anteriormente, os pitagóricos, mais do que uma escola, formavam um culto religioso onde filosofia e moral se constituíam e se fundiam com a matemática. Sua fé fundamental estava em que a essência de tudo pode ser explicado através dos números inteiros (EVES, 1995), diversos fenômenos naturais, a geometria, os seres, tudo poderia ser explicado através dos números. A compreensão que se tinha através de uma demonstração geométrica, era de que dados dois segmentos de reta, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento de reta, talvez extremamente pequeno, que coubesse um número inteiro de vezes em cada um dos dois outros segmentos, compreendendo uma interpretação geométrica dos números racionais (EVES, 1995).

A descoberta dos números irracionais colocava em xeque a base da doutrina pitagórica, a incomensurabilidade ia de encontro aos princípios filosóficos da escola ao qual tudo dependia dos números inteiros (EVES, 1995). Com isso, alega-se que Pitágoras instruiu seus alunos a não divulgarem tal conhecimento. Hipaso de Metaponto, era um membro ilustre da escola pitagórica e se atribui a ele a descoberta dos números irracionais, ou talvez foi ele quem a propagou. Alguns historiadores dizem que essa descoberta provocou muito escândalo entre os gregos, causando a expulsão de Hipaso da escola pitagórica. Alguns outros historiadores ainda afirmam que Hipaso foi morto por tal feito, ou que foi erigido um túmulo para ele, como se estivesse morto, mas é pouco provável.

A descoberta dos irracionais se deu através da diagonal de um quadrado de lado unitário. Podemos ver na figura 5 abaixo a tábua de argila YBC 7289[1]:

[1] Yale Babylonian Collection 7289 – Coleção Babilônica da Universidade de Yale item nº 7289

Figura 5 – Tábua de argila YBC7289



Fonte: https://phys.org/news/2016-04-year-journey-classroom.html

Perceba que a escrita na linha diagonal está como 1;24,51,10 em numeração babilônica, que convertido para nosso sistema numérico vigente forneceria uma boa aproximação de $\sqrt{2} \cong 1{,}4142135623$, algo como:

$$1 \times 60^0 + \frac{24}{60^1} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \cong 1{,}41421296$$

A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ pode ser feita por redução ao absurdo. Vamos apresentar tal demonstração, aceitando que o leitor conheça o processo de tal demonstração, bem como os conceitos de números primos entre si e definição de número par. Portanto vamos considerar que $\sqrt{2}$ seja racional, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, onde a e b são primos entre si. Logo:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \rightarrow a = b\sqrt{2} \rightarrow a^2 = 2b^2$$

Com o desenvolvimento acima temos que a^2 é par, e relembrando que dado um número inteiro s então s^2 é par se, e somente se s for par, temos imediatamente que a é par.

Se a é par, temos que $a = 2p$, com $p \in \mathbb{N}$. Continuando o desenvolvimento da igualdade temos que:

$$a^2 = 2b^2 \rightarrow (2p)^2 = 2b^2 \rightarrow 4p^2 = 2b^2 \rightarrow 2p^2 = b^2\ ,$$

o que nos resulta que b^2 é par, e que b também é par, o que é absurdo pois temos que a e

b são primos entre si. Logo $\sqrt{2}$ não é racional.

Ainda segundo Eves (1995), durante algum tempo o único número irracional conhecido foi $\sqrt{2}$. Porém mais tarde Teodoro de Cirene mostrou outros números irracionais como $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$.

Como dito anteriormente, são inúmeras as contribuições da escola pitagórica não só na matemática, mas em outras áreas do conhecimento, porém, muito provavelmente a maior contribuição feita por eles seja o caráter de formalização matemática que eles adotaram. A matemática através dos pitagóricos e seu mestre passou do caráter *a posteriori* pelo qual se desenvolvia através dos povos mais antigos aos gregos, para uma dimensão *a priori*, isto é, os sistemas axiomáticos que desenvolviam para entender e justificar os fenômenos estudados fundamentou verdades absolutas sem mais uma necessidade de recorrentes explicações. Tomamos como exemplo o famoso teorema de Pitágoras. Foi na escola pitagórica onde pela primeira vez procurou justificar matematicamente o seu conceito, e após sua formalização se estabeleceu que todo triângulo onde as medidas dos catetos ao quadrado resultassem no quadrado da hipotenusa, esse triângulo possuía um ângulo reto. Fundamentando matematicamente o conhecimento *a posteriori* de alguns povos antigos que tomavam uma corda com doze nós e a dividia em três segmentos, um com três, um com quatro e outro com cinco nós, para formar um ângulo reto e utilizar em construções. A definição *a priori* apresentada possibilita um conhecimento formal do fenômeno ou objeto estudado, implicando um domínio absoluto do tema compreendido, não ficando mais à mercê da contingencia da realidade. Esta nova postura adotada por Pitágoras e desenvolvida pelos gregos repercutiu na evolução do pensamento e da sociedade como um todo e na produção de conhecimento científico, elaborado inicialmente em academias e grupos de acesso restrito, como o caso da escola pitagórica, e posteriormente acessível e permissível a todas as classes sociais que apresentassem interesse no desenvolvimento do conhecimento abstrato e formal e suas possíveis aplicações.

Baseado neste contexto histórico, pretendemos desenvolver uma abordagem formal sobre o teorema de Pitágoras e as ternas pitagóricas, possibilitando compreender aspectos filosóficos do trabalho de Pitágoras e a aplicação na matemática escolar, conforme estabelece Moreira (2016) quando afirma que:

> No caso da Matemática Científica, devido à sua estrutura axiomática, todas as provas se desenvolvem apoiadas nas definições e nos teoremas anteriores

> estabelecidos [...]. As definições formais e as demonstrações rigorosas são elementos importantes tanto durante o processo de confirmação da teoria [...] quanto no processo de apresentação sistematizada da teoria já elaborada. No caso da Matemática Escolar, estão permanentemente em cena dois elementos fundamentais que modificam significativamente o papel das definições e provas. O primeiro se refere ao fato de que a "validade" dos resultados matemáticos a serem discutidos no processo de escolarização básica não está posta em dúvida; ao contrário, já está garantida, *a priori*, pela própria Matemática Acadêmica.[...] o segundo elemento, sempre presente no cenário educativo - refere-se à aprendizagem, portanto ao desenvolvimento de uma prática pedagógica visando à compreensão do fato, à construção de justificativas que permitam ao aluno utilizá-lo de maneira coerente conveniente na sua vida escolar e extra escolar. (MOREIRA, 2016, p.23 - 24).

Salientamos ainda que, as demonstrações matemáticas permitem uma relação entre conhecimentos geométricos e algébricos que podem trazer ao aluno uma aprendizagem realmente significativa e aplicável a vários contextos, seja este escolar ou cotidiano.

3 O TEOREMA DE PITÁGORAS

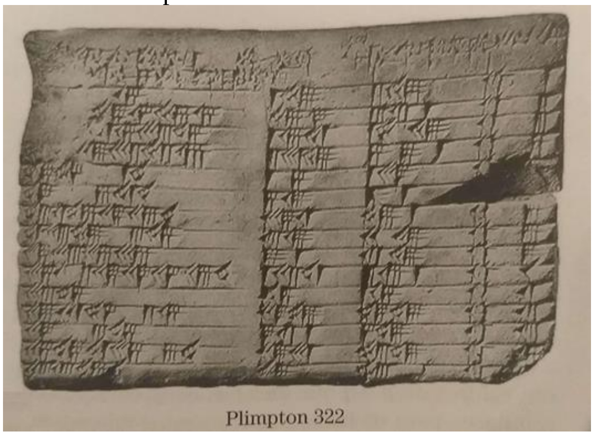
O teorema de Pitágoras talvez forneça a equação matemática mais conhecida no mundo. Ele nos diz que um triângulo é retângulo se e somente se o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Esse teorema se atribui a Pitágoras, porém existem algumas inconsistências na historicidade dessa informação.

3.1 O TEOREMA ATRAVÉS DA HISTÓRIA

Os babilônios possuíam uma matemática razoavelmente desenvolvida para a época, ainda mais em comparação com os egípcios (EVES, 1995). Eles já trabalhavam com frações, haviam produzido soluções para equações quadráticas e cúbicas, bem como soluções para raízes quadradas com aproximações de até 3 casas decimais (EVES, 1995). Devido ao comércio bem desenvolvido que havia na região, relacionado à agricultura forte que havia na época, eles possuíam diversas pré-estruturas matemáticas que solucionavam as mais diversas relações que poderiam surgir, tais como: faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, distribuição dos produtos agrícolas, pesos e medidas dos produtos, além de desenvolvimentos matemáticos nas áreas da álgebra e aritmética (EVES, 1995).

Todas as informações que temos a respeito do desenvolvimento matemático dos babilônios estão registradas em tábuas de argila encontradas por arqueólogos na região da antiga Mesopotâmia. Esses registros históricos são de extrema importância para compreender e identificar os conhecimentos que esses povos antigos possuíam. Com relação ao teorema de Pitágoras, através delas pode-se identificar que eles talvez não tivessem o conhecimento formal do teorema, porém já conheciam as relações matemáticas dos ternos pitagóricos (capítulo 4). Isso se deve a descoberta de uma tábua de argila que é considerada uma das mais importantes encontradas até hoje, chamada de Plimpton 322 (figura 6), que atualmente encontra-se guardada no acervo da Universidade de Columbia.

Figura 6 – Tábua Plimpton 322 – acervo da Universidade da Columbia



Fonte: EVES, 1995

A tábua Plimpton 322 é uma tábua de argila com uma leve rachadura, deixando-a incompleta em um pedaço, nela foram identificados por pesquisadores, quinze linhas e três colunas com ternos pitagóricos, ou seja, trios de números que satisfazem o teorema de Pitágoras. Seu nome veio devido a coleção ao qual pertenceu e ao seu número catalogado dentro dessa coleção. Ela pertenceu à coleção de G. A. Plimpton, que comprou de um vendedor de arqueologia, Edgar J. Banks, e posteriormente a doou para a Universidade de Columbia.

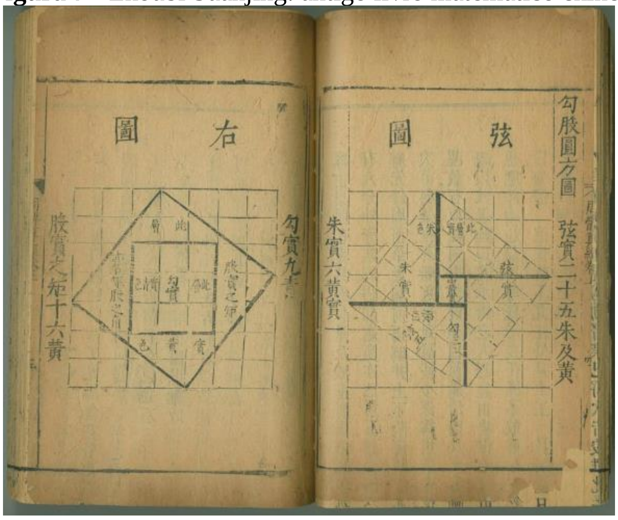
Segundo WAGNER (2016), em uma outra tábua de argila guardada pelo museu britânico se encontra o seguinte problema:

4 é o comprimento
5 é a diagonal
Qual é a altura?
4 vezes 4 dá 16
5 vezes 5 dá 25
Tirando 16 de 25 o resto é 9
Quantas vezes quanto devo tomar para ter 9?
3 vezes 3 dá 9
3 é a altura

Esses diversos artefatos comprovam que antes mesmo de Pitágoras e seus alunos apresentarem uma demonstração do teorema, povos anteriores já conheciam essa relação matemática, indicando também que, possivelmente, dentro de suas jornadas e viagens antes da edificação da escola pitagórica, ele poderia ter tido o primeiro contato com o tema, o inspirando futuramente.

Assim como se supõe o conhecimento por parte dos babilônios, se acredita que os chineses também já conheciam o teorema. Isso se deve ao fato de que um dos mais famosos livros (tesouros) matemáticos chineses, chamado *"Zhoubi Suanjing"*, que reúne 246 problemas matemáticos, traz um problema conhecido como "gou gu", o equivalente chinês ao teorema de Pitágoras (LIMA, 2006). Este livro é datado do século XI a.C., comprovando que o teorema era conhecido pelos chineses muito antes do que Pitágoras.

Figura 7 - Zhoubi Suanjing: antigo livro matemático chinês



Fonte:https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-zhoubi-suanjing

3.2 DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS.

Ao longo da história diversas pessoas, matemáticos ou apreciadores, se propuseram a elaborar uma demonstração ao teorema de Pitágoras. O professor Elisha Scott Loomis reuniu diversas demonstrações em seu livro *The Pythagorean proposition*, onde na primeira edição, do ano 1927, constavam 230 demonstrações, e na segunda edição, no ano de 1940, o número subiu para 370 demonstrações. A seguir, serão apresentadas algumas delas, com o intuito de mostrar diferentes formas de garantir a validade do teorema de Pitágoras e incentivar o ensino destas demonstrações em diferentes níveis do ensino básico, de acordo com as possibilidades de ensino de conteúdos definidas na grade curricular de cada ano escolar e contempladas por livros didáticos adotados pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) que são considerados materiais que servem de base e suporte para as atividades desenvolvidas nas aulas de matemática em todas as regiões do país.

Além disso, sobre as demonstrações matemáticas e a manipulação formal no ensino de Matemática, Lima (2007) afirma que:

> Evidentemente as demonstrações pertencem à componente Conceituação. Elas devem ser apresentadas por serem parte essencial da natureza da Matemática e por seu valor educativo. A nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez de autoridade. Por este motivo, não se deve demonstrar o que é intuitivamente evidente, o que todos aceitam sem hesitação. (LIMA, 2007, p.158).

Obviamente, não temos a pretensão de abordar demonstrações muito complexas do teorema de Pitágoras, mas sim provar a validade do teorema de modo que qualquer aluno a partir do 8º ano do ensino fundamental compreenda que as propriedades matemáticas são válidas não por imposição, mas por construção enraizada em axiomas e raciocínio lógico-dedutivo inquestionáveis. Neste sentido, Lima (2007) afirma que:

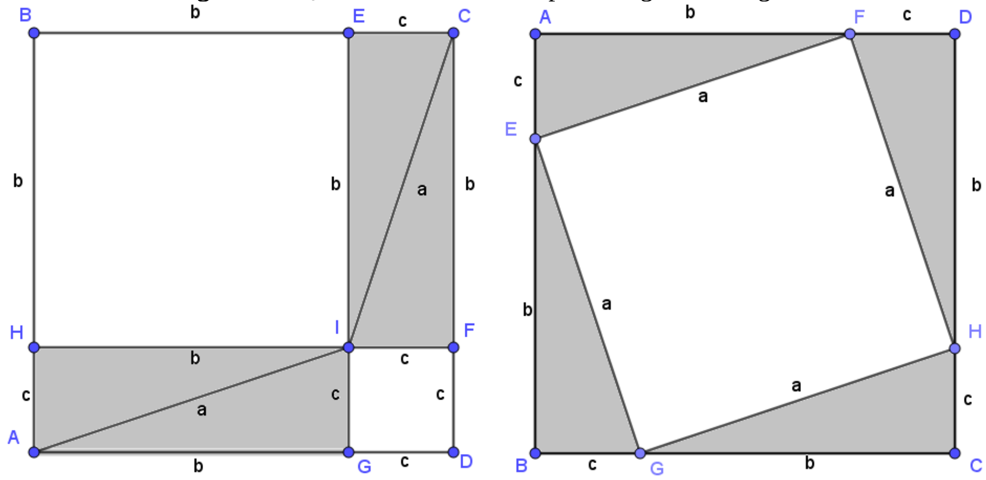
> [...] certos fatos matemáticos importantes não são intuitivamente evidentes, mas possuem demonstrações fáceis e elegantes. Sem dúvida, o exemplo mais conhecido é o Teorema de Pitágoras, do qual devem ser dadas pelo menos duas das inúmeras demonstrações conhecidas. (LIMA, 2007. p. 159).

Diante do exposto, esperamos que as demonstrações que seguem nos próximos capítulos despertem a curiosidade dos estudantes, sirvam de embasamento para o estudo de novas propriedades e aplicações das mesmas, acarretando em um ensino de matemática que seja ao mesmo tempo formal, aplicado, prazeroso e completo.

3.2.1 Demonstração clássica do teorema de Pitágoras

Nessa demonstração temos um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c. Através deles construímos dois quadrados diferentes de lado $b+c$, conforme a figura abaixo:

Figura 8 – Quadrados construídos por triângulos retângulos.



Fonte: Autores.

Observe que os dois quadrados possuem a mesma área, pois seus lados têm mesma medida: $b + c$. Comparando as áreas através da soma das áreas dos polígonos que compõem cada quadrado, podemos perceber que o primeiro quadrado ABCD é composto por um quadrado de lado b, dois retângulos de lados b e c, e um quadrado de lado c. Já o segundo quadrado ABCD é composto por um quadrado de lado a e quatro triângulos retângulos congruentes de catetos b e c. Sendo assim, podemos equacionar as áreas da seguinte forma:

$$b^2 + 2.b.c + c^2 = \left(\frac{b\,.\,c}{2}\right).4 + a^2$$

$$b^2 + 2.b.c + c^2 = 2.b.c + a^2$$

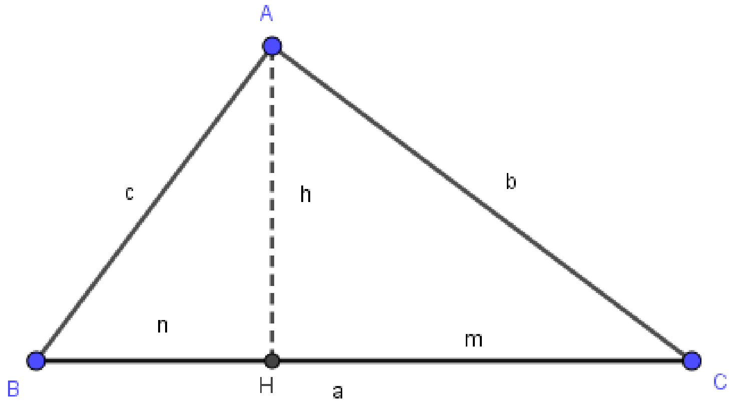
$$b^2 + c^2 = a^2$$

A demonstração clássica de Pitágoras utiliza os conhecimentos de soma de áreas de figuras planas, possibilitando sua abordagem no segundo ano do ensino médio, tomando como referência o livro *Matemática: contexto & aplicações*, do autor Luiz Roberto Dante. A coleção *Ciência, linguagem e tecnologia* do professor Jackson Ribeiro, voltada para o ensino médio, através do capítulo nove do primeiro volume, possibilita uma abordagem também no ensino médio, porém no primeiro ano. A abordagem dessa demonstração no ensino fundamental pode ser considerada após análise da coleção *Geração alpha*, publicado em 2018 pelos professores Carlos N. C. de Oliveira e Felipe Fugita, que desenvolve no livro do oitavo ano o cálculo de área de figuras planas e no livro do nono ano traz o ensino do triângulo retângulo e suas relações métricas. Podemos também levar em conta o livro do ano 2000 do professor Gelson Iezzi, *Matemática e* *realidade* onde trabalha áreas de figuras planas e teorema de Pitágoras.

3.2.2 Demonstração algébrica

Essa demonstração é desenvolvida através dos conhecimentos de semelhança de triângulos. A partir de um triângulo retângulo ABC, retângulo em A e altura AH= h relativa à hipotenusa BC, representada na figura abaixo, podemos desenvolver uma demonstração ao famoso teorema de Pitágoras. Essa demonstração vem das relações métricas do triângulo retângulo.

Figura 9 – Triângulo ABC **-** prova algébrica.



Fonte: Autores.

Do triângulo retângulo acima temos que $\triangle$BHA $\approx$ $\triangle$ABC pelo caso de semelhança AA, pois $B\hat{H}A = B\hat{A}C$ e $H\hat{B}A = C\hat{B}A$. Com isso temos as seguintes relações:

$$\frac{n}{c} = \frac{c}{a} \rightarrow c^2 = a.n \qquad (1)$$

Analogamente, $\triangle$AHC $\approx$ $\triangle$BAC pelo caso AA, pois $A\hat{H}C = B\hat{A}C$ e $H\hat{C}A = B\hat{C}A$. Com isso temos as relações:

$$\frac{m}{b} = \frac{b}{a} \rightarrow b^2 = a.m \qquad (2)$$

Somando (1) e (2) temos:

$$b^2 + c^2 = a.m + a.n = a.(m+n) = a.a = a^2$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$

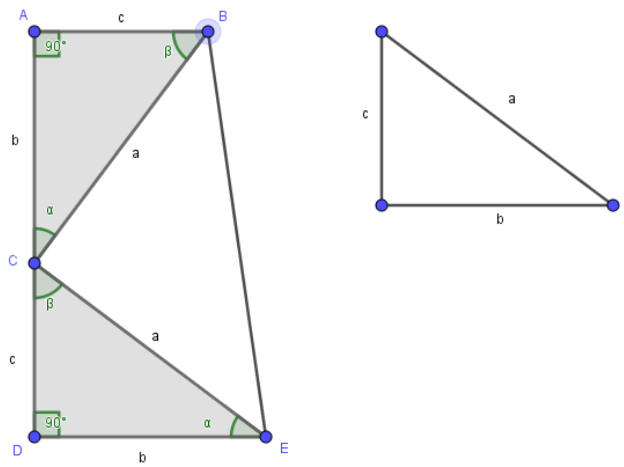
Tomando como referência o livro didático do nono ano *Vontade de saber matemática*, dos autores Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro, essa demonstração pode ser abordada no nono ano do ensino fundamental, dentro do tópico das relações métricas do triângulo retângulo. Ainda dentro do ensino fundamental, podemos justificar sua abordagem através dos livros *Matemática e realidade*, do professor Gelson Iezzi e *Para viver juntos*, volume nove, da editora SM. A abordagem no ensino médio seria dentro dos tópicos semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo, conforme podemos observar no livro *Matemática: contexto & aplicações*, volume 1, de Luiz Roberto Dante. Ainda dentro da perspectiva do ensino médio, o livro *Matemática: ciência e aplicações,* volume 1, de autoria de Gelson Iezzi, através do capítulo dez, trata de semelhança e triângulos retângulos juntamente com as relações métricas, possibilitando desenvolver esta demonstração alinhada aos conteúdos programáticos do ensino médio.

3.2.3 Demonstração do presidente James Garfield

James Abram Garfield (1831 – 1881) foi um general entusiasta da matemática e o vigésimo presidente dos Estados Unidos, governando por apenas 4 meses antes do seu assassinato. A prova que ele desenvolveu utiliza os conhecimentos sobre o polígono trapézio. Acompanhe a resolução:

A partir de um triângulo retângulo catetos b e c e hipotenusa a, constrói-se um trapézio de lado $b + c$ conforme a figura 10:

Figura 10 – Demonstração do presidente americano J. Garfield



Fonte: Autores.

Perceba que a figura acima é formada por três triângulos retângulos, pois o △BCE também é retângulo em C pois, pelo triângulo retângulo original temos que $\alpha + \beta = 90º$ e pelo trapézio construído temos: $\alpha + \beta + B\hat{C}E = 180º \rightarrow 90º + B\hat{C}E = 180º \rightarrow B\hat{C}E = 90º$.

Para calcular a área da figura podemos efetuar de duas maneiras, uma utilizando a equação da área do trapézio ABED e outra somando as áreas dos triângulos retângulos que compõem este trapézio.

Pela equação da área do trapézio temos:

$$A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(b+c)}{2}.(b+c) = \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{b^2 + 2.b.c + c^2}{2}$$

Pelo cálculo de área dos triângulos CDE, ACB e CBE temos:

$$\frac{b.c}{2} + \frac{b.c}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{2.b.c}{2} + \frac{a^2}{2}$$

Igualando as equações teremos:

$$\frac{b^2 + 2.b.c + c^2}{2} = \frac{2.b.c}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$b^2 + 2.b.c + c^2 = 2.b.c + a^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \;\square$$

A demonstração do presidente James Garfield faz uso do conhecimento do cálculo de áreas das figuras planas, podendo-se validar uma abordagem de tal demonstração no ensino fundamental ao se analisar a coleção *Geração alpha*, da editora SM, onde no capítulo dez do volume oito trata das áreas de diversas figuras planas, e no capítulo três do volume nove trata da semelhança de triângulos, triângulos retângulos e o teorema de Pitágoras. No ensino médio também poderia ser abordado essa demonstração conforme vemos nos capítulos dez e doze do livro *Matemática: ciência e aplicações*, do autor Gelson Iezzi, onde temos a previsão de ensino dos conteúdos semelhança de triângulos, triângulos retângulos e áreas de figuras planas.

3.2.4 Demonstração através da fórmula de Heron

Sobre Heron (Herão) de Alexandria, assim como diversos outros matemáticos e filósofos antigos, não se tem registros oficiais do período que viveu e das reais contribuições científicas. Alguns historiadores estimam que tenha vivido entre os anos 150 a.C. e 250 d.C. Segundo Eves (1995), há razões para se supor que ele tenha sido um egípcio com formação grega.

A fórmula de Heron, utilizada na demonstração a seguir, para a área de um triângulo, está em função do semiperímetro e dos lados do polígono e é dada por

$$A = \sqrt{p.(p - a)(p - b)(p - c)}\,,$$

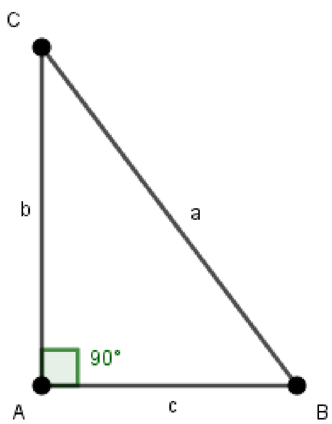
onde p é o semiperímetro do triângulo de lados medindo a, b e c, ou seja,

$$p = \frac{(a+b+c)}{2}\,.$$

Aplicando a fórmula de Heron em um triângulo retângulo de hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c (figura 11), teremos:

$$A = \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}.\left(\frac{(a+b+c)}{2} - a\right)\left(\frac{(a+b+c)}{2} - b\right)\left(\frac{(a+b+c)}{2} - c\right)}$$

Figura 11 – Triângulo retângulo.



Fonte: Autores.

Perceba que a sua área também pode ser calculada pela expressão $A = \frac{b\,.\,h}{2}$, logo, para o triângulo representado na figura 11, temos que $A = \frac{b\,.\,c}{2}$. Igualando as expressões que fornecem a área deste triângulo temos:

$$\frac{b\ .\ c}{2} = \sqrt{\left(\frac{(a+b+c)}{2}\right).\left(\frac{(a+b+c)}{2} - a\right).\left(\frac{(a+b+c)}{2} - b\right).\left(\frac{(a+b+c)}{2} - c\right)}$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado temos:

$$\frac{b^2.c^2}{4} = \left(\frac{(a+b+c)}{2}\right).\left(\frac{(a+b+c)}{2} - a\right).\left(\frac{(a+b+c)}{2} - b\right).\left(\frac{(a+b+c)}{2} - c\right)$$

Fatorando as frações em cada parênteses do lado direito através do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) dos denominadores, e colocando $\frac{1}{16}$ em evidência, teremos:

$$\frac{b^2.c^2}{4} = \frac{1}{16}\ .(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)$$

Multiplicamos por 16 os dois lados da igualdade e realizamos o produto dos 4 termos em parênteses do lado direito.

$$4\ .b^2.c^2 = 2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

$$2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 - 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 0$$

$$-a^4 + 2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 - b^4 - 2.b^2.c^2 - c^4 = 0$$

$$-(-a^2)^2 + 2.a^2(b^2+c^2) - (b^2 + c^2)^2 = 0$$

$$(-a^2)^2 - 2.a^2(b^2+c^2) + (b^2 + c^2)^2 = 0$$

$$\left(-a^2 + (b^2+c^2)\right)^2 = 0$$

$$-a^2 + (b^2+c^2) = 0$$

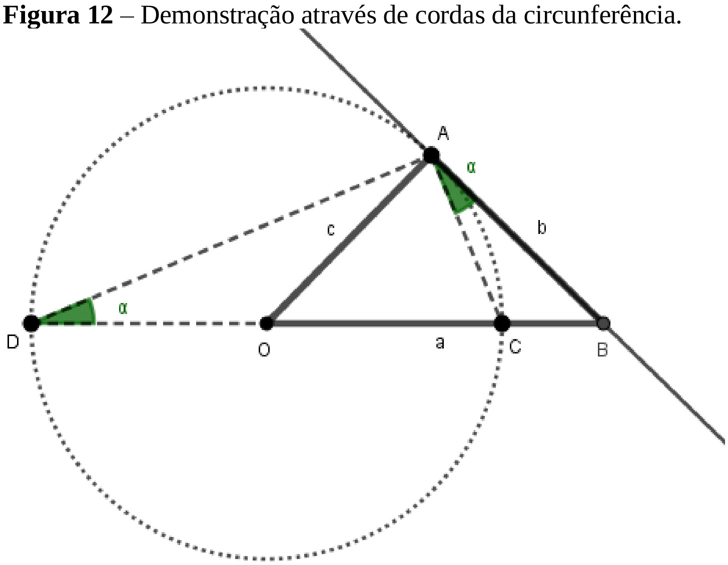
$$b^2 + c^2 = a^2 \quad \square$$

Essa demonstração utilizando a fórmula de Heron possui muitos passos algébricos, ainda assim podemos vislumbrar uma abordagem dela dentro do ensino fundamental, quando analisamos o livro didático de matemática *Para viver juntos*, volume nove, da editora SM, onde em um dos tópicos do capítulo 5, enquanto trata de área de triângulos, expõe a fórmula de Heron. Devido ao nível de raciocínio que é necessário para a realização das fatorações dos produtos notáveis no desenvolvimento da equação, o ensino desta demonstração se torna mais viável nas turmas de segundos e terceiros anos do ensino médio, após o ensino das fórmulas para o cálculo de área de triângulos e dos demais polígonos planos convexos, conforme abordagem dada deste tema pelos autores Dante, Iezzi e Souza.

3.2.5 Demonstração usando segmentos secantes e tangentes a uma circunferência

Segundo Loomis (1940), essa demonstração é atribuída ao professor John M. Richardson, publicada no periódico *Runkle's mathematical* no ano de 1859. Junto dessa demonstração, o professor Richardson totaliza 28 demonstrações propostas pelo mesmo. Loomis (1940), também relata que posteriormente foi identificado essa mesma demonstração dada por outros autores.

Figura 12 – Demonstração através de cordas da circunferência.



Fonte: Autores.

Considerando uma circunferência f de raio medindo r, centro O, diâmetro DC, e um ponto A dado sobre esta circunferência, traçamos uma reta AB tangente a circunferência de tal modo DB seja um segmento secante a circunferência passando pelo seu centro.

Tomamos o triângulo retângulo OAB, retângulo em A, com hipotenusa OB e catetos AO e AB. Pelo teorema que relaciona segmentos secantes e segmentos tangentes à circunferência temos:

$$AB^2 = BC \times BD$$

Contudo, observe que $AB = b, BC = (a - r)\ e\ BD = (a + r)$, porém $r = c$, então, reescrevendo BC e BD temos que $BC = (a - \mathrm{c})\ e\ BD = (a + \mathrm{c})$.

Aplicando o valor destes segmentos na equação fornecida pelo teorema das secantes e tangentes à circunferência, temos:

$$b^2 = (a - c) \times (a + c)$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \ \square$$

O ensino desta demonstração através do teorema que relaciona segmentos secantes e segmentos tangentes a uma circunferência se justifica ainda no ensino fundamental, pois esse tema é tratado em livros didáticos do ensino fundamental como podemos ver nos livros *Matemática e realidade,* oitava série, do autor Gelson Iezzi, e também no livro didático de matemática *Para viver junto,* da editora SM. Uma abordagem no ensino médio pode ser desenvolvida sem grandes problemas a partir do momento em que é trabalhado o tema geometria plana, com abordagem do conteúdo circunferência, cordas e segmentos relativos a uma circunferência, tópicos estes que geralmente são expostos nas turmas de segundos e terceiros anos.

3.2.6 Demonstração do teorema por Euclides

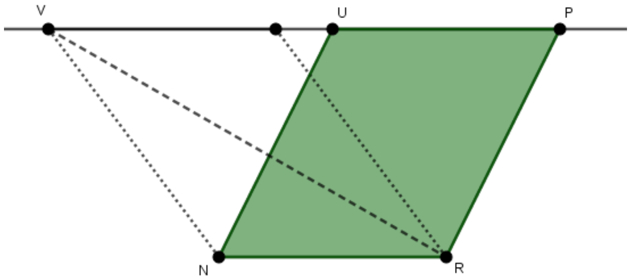
Euclides foi um matemático grego e um dos mais brilhantes da história. Segundo Eves (1995), não se pode definir a data e o local de nascimento dele, porém sobre sua formação matemática existe uma forte possibilidade de que tenha sido na escola platônica de Atenas. A principal obra de Euclides é o livro Os elementos, escrito por volta de 300 a.C. Esta obra reúne 13 livros com diversas demonstrações matemáticas, sendo uma das principais obras matemáticas de toda a história e tomada como referencial a todo o estudo de geometria desde sua concepção, bem como uma grande contribuição a teoria dos números.

No livro I - proposição 47, ele apresenta o teorema de Pitágoras junto de uma demonstração, onde o enunciado da proposição diz: “Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto.”

Para essa demonstração, vamos observar primeiro a figura 13 para relembrar que a área de um triângulo é a metade da área de um paralelogramo de mesma base e mesma altura, ou seja, dado $NR \mathbin{/\!/} VP$ e $NU \mathbin{/\!/} PR$, temos que $A_{VNR} = \frac{A_{UNRP}}{2}$ pois a altura do triângulo VNR e do paralelogramo UNRP tem mesma medida (distância entre as paralelas

VP e NR), e estão sobre a mesma base NR. A partir disso, podemos perceber as relações de áreas utilizadas na demonstração de Euclides.

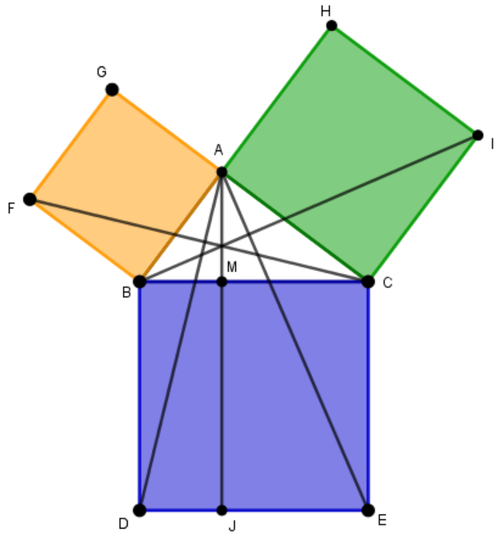
Figura 13 – Área dos paralelogramos



Fonte: Autores.

Agora, observe a figura 14, utilizada por Euclides em *Os elementos*, em que, sobre os lados do triângulo retângulo ABC, retângulo em A, foram construídos os quadrados ABFG de lado medindo b, ACIH de lado medindo c, e quadrado BCED, de lado a.

Figura 14 – Demonstração do teorema por Euclides.



Fonte: Autores.

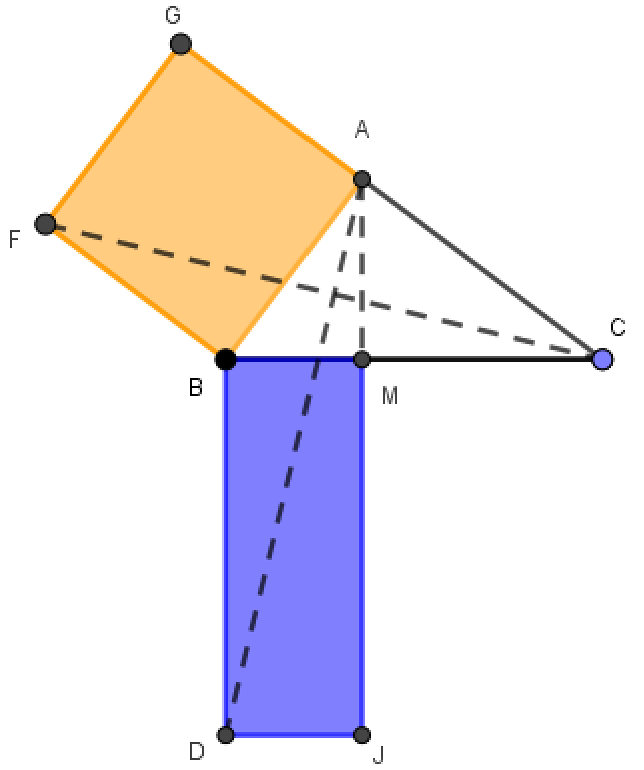
O segmento AJ, por construção, é paralelo a BD, e analogamente a CE. Os ângulos $F\hat{B}A$ e $D\hat{B}C$ são ambos retos, com isso temos que $\Delta_{FBC} \equiv \Delta_{ABD}$ pelo caso LAL de congruência, pois $AB = FB,\ BD = BC\ e\ A\hat{B}D = F\hat{B}C\ (A\hat{B}D = 90° + A\hat{B}C\ e\ F\hat{B}C = 90° + A\hat{B}C)$.

Analogamente, $\Delta_{BCI} \equiv \Delta_{ACE}$ também pelo caso LAL, pois $AC = CI, CE =$

CB e $A\hat{C}E = B\hat{C}I$ $(A\hat{C}E = 90° + B\hat{C}A$ e $B\hat{C}I = 90° + B\hat{C}A)$. A partir daí temos que:

- A área do triângulo FBC é metade do quadrado ABFG;

Figura 15 – Relação entre área de triângulos e retângulos.



Fonte: Autores.

E de modo análogo;

- A área do triângulo BDA é metade do quadrilátero BDJM;
- A área do triângulo CBI é metade do quadrado CIHA;
- A área do triângulo CEA é metade do quadrilátero CEJM;

Reescrevendo estas relações através do equacionamento das áreas temos que $2 \times A_{FBC} = A_{FBAG}$ e $2 \times A_{BDA} = A_{BDJM}$. Mas como $A_{BDA} = A_{FBC}$, então $A_{FBAG} = A_{BDJM}$, o que pode ser reescrito como $A_{BDJM} = b^2$, garantindo que a área do retângulo BDJM é igual a área do quadrado sobre o lado do cateto b. De modo semelhante, podemos perceber que $2 \times A_{CBI} = A_{CIAH}$ e $2 \times A_{CEA} = A_{CEJM}$, e como $A_{CBI} = A_{CEA}$, temos que $A_{CIAH} = A_{CEJM}$, ou seja, $A_{CEJM} = c^2$, provando que a área do retângulo CEJM é igual a área do quadrado que tem como lado o cateto de medida c. Com isso teremos que

$A_{CEJM} + A_{CIAH} = b^2 + c^2$. Mas como a soma das áreas dos retângulos CEJM e CIAH é igual à área do quadrado de lado medindo a, ou seja, $A_{CEJM} + A_{CIAH} = a^2$, temos que $a^2 = b^2 + c^2$. $\square$

A abordagem desta demonstração pode ser aplicada no primeiro ano do ensino médio, utilizando como referência o livro *Matemática: contexto & aplicações*, volume 1, de Luiz Roberto Dante, dentro do tópico de semelhança de triângulos. Essa demonstração poderia ser também aplicada no nono do ensino fundamental, respeitando as limitações dos conhecimentos matemáticos dos alunos e a utilizando uma abordagem com o auxílio de material concreto ou mesmo do software GeoGebra para uma melhor assimilação da relação entre as áreas dos retângulos e quadrados e das congruências entre triângulos, aproveitando o capítulo de semelhança de triângulos do livro *Vontade de saber matemática*, do nono ano, de Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro.

3.2.7 Recíproca do teorema de Pitágoras.

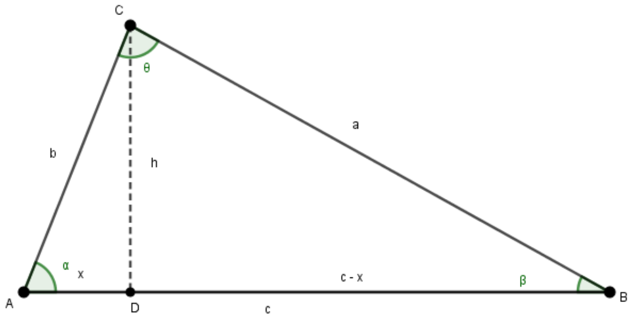
Como já vimos anteriormente, o teorema de Pitágoras propõe que para um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Porém é válida a recíproca deste teorema? Barbosa (1993) propõe o seguinte: “se em um triângulo o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados, então o ângulo oposto a este lado maior é reto.

Para demonstrar a recíproca do teorema de Pitágoras, vamos utilizar a técnica de demonstração que se baseia na equivalência da contrapositiva com a condicional de duas proposições (na terminologia da Lógica temos $p \rightarrow q$ equivale a $\sim q \rightarrow \sim p$). Sendo assim, para provar que em um triângulo de lados a, b e c e ângulo α oposto ao lado a com $a^2 = b^2 + c^2$, então α = 90°, vamos supor que α ≠ 90° abrindo em dois casos (α < 90° ou α > 90°) chegando na desigualdade $a^2 \neq b^2 + c^2$, o que prova o resultado.

- Caso 1: α < 90°

Observe a figura abaixo:

Figura 16 – Caso 1 – Recíproca do teorema de Pitágoras.



Fonte: Autores.

Perceba que a projeção de C em AB é D, com isso o triângulo ADC é retângulo em D, logo teremos: $b^2 = h^2 + x^2 \rightarrow h^2 = b^2 - x^2$. Analogamente temos que o triângulo BDC também é retângulo em D, resultando em: $a^2 = h^2 + (c - x)^2$

Juntando as equações:

$$a^2 = b^2 - x^2 + (c - x)^2$$

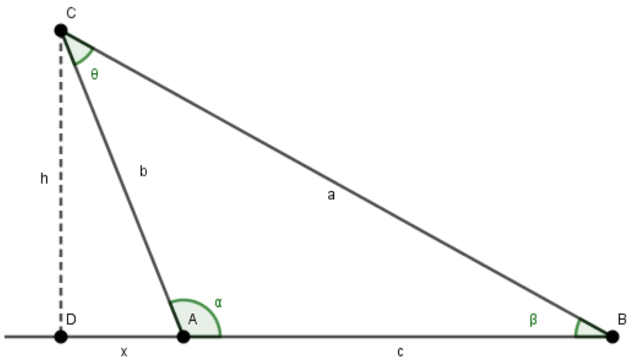
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$.

- Caso 2: α > 90°

Figura 17 – Caso 2 – Recíproca do teorema de Pitágoras.



Fonte: Autores.

Observe que a projeção de C no prolongamento de AB é o ponto D. Logo temos que $b^2 = h^2 + x^2 \rightarrow h^2 = b^2 - x^2$. Observe que no triângulo BCD temos:

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$$

ou seja: $a^2 > b^2 + c^2$.

Portanto a relação $a^2 = b^2 + c^2$ não vale para quando α > 90°ou α < 90°.

Esta demonstração pode ser abordada no nono do ensino fundamental, evidentemente respeitando a proposta de conteúdo do currículo de cada escola, dentro do tópico das relações métricas do triângulo retângulo como podemos observar no livro didático *Vontade de saber matemática*, do nono ano, de Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro. De mesma forma, essa demonstração pode ser abordada no ensino médio, no primeiro ano do médio, como propõe o livro *Matemática: contexto & aplicações*, de Luiz Roberto Dante, dentro do tópico homônimo ao tópico citado anteriormente.

Todas as demonstrações apresentadas acima foram desenvolvidas através de passos logico-dedutivos com segmentos genéricos, comprovando a validade do teorema e mostrando as inúmeras possibilidades de abordagem que ele possui. Para dar mais profundidade ao tema e possibilitar mais aplicações, é necessário ser estudado as características desses segmentos inteiros que compõe o triângulo, isto é, as ternas pitagóricas que satisfazem o teorema. O capítulo quatro se dedica ao desenvolvimento delas evidenciando suas relações aritméticas.

4 TERNAS PITAGÓRICAS

Tomando como referência o texto de Andrade (2013), iremos definir e demonstrar algumas propriedades sobre ternas pitagóricas.

Sejam *(x, y, z)* números inteiros positivos de tal forma que satisfaçam o teorema de Pitágoras, ou seja, $x^2 + y^2 = z^2$, então o terno *(x, y, z)* é um terno pitagórico, ou um triângulo pitagórico, se considerarmos a representação geométrica desses valores como medidas de segmentos de reta. Se x, y, z são relativamente primos dois a dois, ou seja, $mdc(x, y) = mdc(x, z) = mdc(y, z) = 1$, dizemos que o terno *(x, y, z)* é um terno pitagórico primitivo.

Seja *(x, y, z)* um terno pitagórico e *k* um número inteiro positivo. Então teremos que *(kx, ky, kz)* também é um terno pitagórico, porém não primitivo.

$$(kx)^2 + (ky)^2 = k^2x^2 + k^2y^2 = k^2(x^2 + y^2) = k^2z^2 = (kz)^2$$

Podemos exemplificar os casos acima usando o terno (3,4,5) ou mesmo (5,12,13) que seriam exemplos de ternos pitagóricos primitivos, bem como (6,8,10) e (10,24,26) exemplos de ternos pitagóricos não primitivos, mas sim com uma multiplicidade $k = 2$ em relação aos ternos primitivos listados anteriormente, respectivamente.

O fato de nos ternos pitagóricos primitivos os valores serem primos entre si, garante que x e y possuem paridade distintas. Vamos mostrar tal propriedade, porém antes devemos recordar uma propriedade dos números que nos diz que todo número ao quadrado pode ser escrito da forma $n^2 = 4k$ ou $n^2 = 4k + 1$, com $n, k \in \mathbb{Z}$, ou usando a notação de congruência módulo m,

$$n^2 \equiv 0 \; mod \; 4 \; ou \; n^2 \equiv 1 \; mod \; 4.$$

Estas duas formas de representar n^2 significam dizer que um número que é quadrado perfeito ou deixa resto 1 ou deixa resto 0 quando dividido por 4.

Vamos supor que n seja par, logo n é da forma $n = 2q$, com isso, $n^2 = 4q^2$, com $q \in \mathbb{Z}$, e tomando $q^2 = k$, temos que $n^2 = 4k$ ou da forma $n^2 \equiv 0 \; mod \; 4$.

Agora vamos supor que n seja ímpar, logo n é da forma $n = 2q + 1$, com $q \in \mathbb{Z}$. Com isso, $n^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4(q^2 + q) + 1 = 4l + 1$, com $l \in \mathbb{Z}$, logo $n^2 = 4k + 1$ ou escrito na notação de congruência, é da forma $n^2 \equiv 1 \; mod \; 4$.

Visto isso, vamos analisar a paridade de x e y. Iniciamos supondo que x seja par e y par, logo teríamos que o $mdc(x, y) = 2$, logo não seria um terno primitivo pois $mdc(x, y) = 1$ por definição. Vamos agora então considerar x e y ambos ímpares, logo representaríamos $x = 2p + 1$ e $y = 2q + 1$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Vamos utilizar em alguns momentos do texto somente o conjunto dos naturais, pois estaremos nos referindo sempre a valores que representam medidas de segmento de reta, ou seja, valores positivos. Assim, temos que

$$x^2 + y^2 = (2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 + 4q^2 + 4q + 1$$
$$x^2 + y^2 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2$$
$$x^2 + y^2 = 4t + 2 = z^2 \text{ , com } t \in \mathbb{N},$$

mas isto resultaria que z^2 é da forma $z^2 \equiv 2 \; mod \; 4$, o que é absurdo de acordo com o que foi visto anteriormente. Logo x e y tem paridade distintas. Com este resultado podemos também identificar que z é ímpar, pois a soma de um natural par com um ímpar resulta em um número natural ímpar.

Teorema 1. Dado números inteiros x, y, z, temos que *(x, y, z)* é uma terna pitagórica se e somente se existem *u, v* $\in \mathbb{Z}$, tais que *u > v > 0, u e v* tem mesma paridade, uv é um quadrado perfeito, $x = \sqrt{uv}, y = \frac{u-v}{2}$ e $z = \frac{u+v}{2}$.

Demonstração:

Seja *(x, y, z)* um terno pitagórico tal que $x^2 + y^2 = z^2$ (1), com $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Observe que

$$x^2 + y^2 = z^2 \rightarrow x^2 = z^2 - y^2 \rightarrow x^2 = (z + y)(z - y).$$

Sejam $u = (z + y)$ e $v = (z - \text{y})$. Com isso temos que $u > v > 0$ e u e v possuem a mesma paridade, pois a soma e subtração de dois números pares ou dois números ímpares é sempre par, e de um par e um ímpar é sempre ímpar.

Ou seja; $x^2 = u \, . \, v \rightarrow x = \sqrt{u.v}$

Temos que $u = z + y \rightarrow z = u - \text{y}$, aplicando em (1), teremos:

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$u.v + y^2 = (u - y)^2$$
$$u.v + y^2 = u^2 - 2.u.y + y^2$$
$$u.v - u^2 = -2.u.y$$
$$\frac{u(v - u)}{-2.u} = y \rightarrow y = \frac{u - v}{2}$$

Agora, substituindo $y = \frac{u-v}{2}$ em $z = u - y$:

$$z = u - \left(\frac{u - v}{2}\right) = \frac{2u - u + v}{2}$$

$$z = \frac{u+v}{2} \qquad \square$$

<u>Teorema 2.</u> Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$, com $mdc(x, y) = 1$ e $x^2 + y^2 = z^2$, existem a e $b \in \mathbb{Z}$ com paridade distintas, $mdc(a, b) = 1$ e $a > b > 0$, tais que $x = 2.a.b$, $y = a^2 - b^2$ e $z = a^2 + b^2$.

Demonstração:

Vimos na demonstração anterior que podemos representar $x^2 = u\,.\,v$, com u e v com mesma paridade. Vamos então considerar que u e v sejam ambos pares, e assim podemos reescrever u e v como $u = 2.r$ e $v = 2.s$, com $r, s \in \mathbb{Z}$.

Observe que $mdc(r, s) = 1$ pois supondo que haja $d \neq 1$ tal que $d = mdc(r, s)$ teríamos que $d|r$ e $d|s$, e isso implicaria que $d|x$ e $d|y$, mas como $mdc(x, y) = 1$, temos que $d = 1$.

Pelo teorema fundamental da aritmética podemos representar u e v da forma

$$u = 2.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\ldots p_k^{\alpha_k} \text{ e } v = 2.q_1^{\beta_1}.q_2^{\beta_2}\,q_3^{\beta_3}\ldots q_l^{\beta_l}$$

com $p_i^{\alpha_i} \neq q_i^{\beta_i}$ e p_i, q_i sendo números primos e i, k, l números naturais.

Perceba que $x^2 = u\,.\,v \rightarrow x^2 = 4.r\,.\,s \rightarrow x = 2\sqrt{r.s}$, logo $r.s$ é um quadrado perfeito, que pode ser reescrito como $\sqrt{r}.\sqrt{s}$. Retomando que $mdc(r, s) = 1$, todo $p_i^{\alpha_i}$e $q_i^{\beta_i}$ é um fator com expoente par. Então, $\exists\ a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $r = a^2$ e $s = b^2$.

$$x = 2\sqrt{r.s} \rightarrow x = 2\sqrt{a^2.b^2} \rightarrow x = 2.a.b$$

Retomando $y = \frac{u-v}{2}$ temos que

$$y = \frac{u - v}{2} \rightarrow y = \frac{2r - 2s}{2} \rightarrow y = r - s \rightarrow y = a^2 - b^2$$

Analogamente para $z = \frac{u+v}{2}$ chegamos que

$$z = \frac{u+v}{2} \rightarrow z = \frac{2r+2s}{2} \rightarrow z = r + s \rightarrow z = a^2 + b^2 \qquad \square$$

O desenvolvimento anterior considerou que u e v eram ambos pares, porém agora vamos analisar o caso em que u e v sejam ambos ímpares.

Sejam u e v ambos ímpares. Temos que o $mdc(x, y) = 1$ resulta em que o $mdc(u, v) = 1$, pois supondo um valor $d \in \mathbb{Z}$ tal que $mdc(u, v) = d$, resultaria que $d|u$ e $d|v$, consequentemente $d|x$ e $d|y$, porém $mdc(x, y) = 1$, logo $d = 1$.

Do teorema 1 temos: $x = \sqrt{u.v} \rightarrow x^2 = u.v$, com $mdc(u, v) = 1$, resultando que u e v são quadrados perfeitos, isto é, são números que podem ser representados pelo quadrado de um outro número natural. Portanto, $\exists\ m, n \in \mathbb{Z}$, $m > n > 0$, onde $u = m^2$ e $v = n^2$. E como u e v são ambos ímpares, teremos que m e n serão ambos ímpares também.

Com isso:

$$y = \frac{u - v}{2} = \frac{m^2 - n^2}{2} = 2\left(\frac{m + n}{2}\right)\left(\frac{m - n}{2}\right) \rightarrow y = 2ab$$

tal que $a = \left(\frac{m+n}{2}\right)$ e $b = \left(\frac{m-n}{2}\right)$.

Desse modo:

$$x = m.n = \left(\frac{m + n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m - n}{2}\right)^2 \rightarrow x = a^2 - b^2$$

Perceba que:

$$\left(\frac{m + n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m - n}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 2mn + n^2}{4}\right) - \left(\frac{m^2 - 2mn + n^2}{4}\right) = \frac{4mn}{4} = mn$$

Consequentemente para z:

$$z = \frac{u + v}{2} = \frac{m^2 + n^2}{2} = \frac{2}{2}\left(\frac{m^2 + n^2}{2}\right) = \frac{2m^2 + 2n^2}{4} \rightarrow$$

$$z = \frac{2m^2 + 2n^2}{4} + \left(\frac{2mn}{4}\right) - \left(\frac{2mn}{4}\right)$$

$$z = \frac{m^2 + 2mn + n^2}{4} + \frac{m^2 - 2mn + n^2}{4}$$

$$z = \left(\frac{m + n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m - n}{2}\right)^2$$

$$z = a^2 + b^2 \ \square$$

Do enunciado do teorema apenas falta mostrar que a e b possuem paridades distintas. Para isso, vamos partir do desenvolvimento acima onde temos a e $b \in \mathbb{Z}$, da forma $a = \left(\frac{m+n}{2}\right)$ e $b = \left(\frac{m-n}{2}\right)$, com m e $n \in \mathbb{Z}$.

Caso $m \equiv n \equiv 1\ mod4$ ou $m \equiv n \equiv 3\ mod4$, temos $m + n \equiv 2\ mod4$ e $m - n \equiv 0\ mod4$, de maneira que $a = \left(\frac{m+n}{2}\right)$ será impar e $b = \left(\frac{m-n}{2}\right)$ será par.

Agora se $m \equiv 1\ mod4$ ou $n \equiv 3\ mod4$, ou ao contrário, $n \equiv 1\ mod4$ ou $m \equiv 3\ mod4$, então teremos que $m + n \equiv 0\ mod4$ e $m - n \equiv 2\ mod4$, tal que $a = \left(\frac{m+n}{2}\right)$ será par e $b = \left(\frac{m-n}{2}\right)$ será ímpar, logo a e b possuem paridades distintas.

Para provar e recíproca do teorema 2 temos que provar que se $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$ e $z = a^2 + b^2$, então é $x^2 + y^2 = z^2$, com $mdc(x, y) = 1$. A relação $x^2 + y^2 = z^2$ é válida pois fazendo a substituição temos que:

$$x^2 + y^2 = (2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 = z^2$$

. É possível perceber que x é par, pois é um múltiplo de 2, e que y é ímpar, visto que a e b tem paridade distintas. Vamos supor que $mdc(x, y) \neq 1$, logo existe um $p \in \mathbb{Z}$, primo e ímpar, tal que $p|x\ e\ p|y$. Se $p|x$, então $p|2ab$, logo $p|a$ ou $p|b$. Se $p|y$, então $p|\ a^2 - b^2$, portanto $p|a$ e $p|b$. Mas como $mdc(a, b) = 1$, resulta que $p = 1$, o que é absurdo pois p é primo. Portanto, $mdc(x, y) = 1$, provando assim o resultado.

Podemos demonstrar este teorema 2 de uma outra maneira, vamos partir do teorema inicial onde $x^2 + y^2 = z^2$ e da mesma forma que trabalhamos anteriormente faremos o seguinte:

$$x^2 + y^2 = z^2 \rightarrow x^2 = z^2 - y^2 \rightarrow x^2 = (z + y)(z - y)$$

Devemos lembrar que $x, y, z \in \mathbb{Z}^*$, logo podemos reescrever a relação acima da forma

$$x^2 = (z + y)(z - y) \rightarrow x.x = (z + y)(z - y) \rightarrow \frac{x}{z-y} = \frac{z+y}{x} = \frac{a}{b}, com\ a, b\ \in\ \mathbb{Z}.$$

$$(1) \quad \frac{x}{z - y} = \frac{a}{b}\ e \quad (2) \quad \frac{z + y}{x} = \frac{a}{b}$$

$$(1)\frac{x}{z - y} = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{z - y}{x} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{z}{x} - \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \rightarrow \left(\frac{z}{x} = \frac{b}{a} + \frac{y}{x}\right) ou \left(\frac{y}{x} = \frac{z}{x} - \frac{b}{a}\right)$$

$$(2)\frac{z + y}{x} = \frac{a}{b} \rightarrow \frac{z}{x} + \frac{y}{x} = \frac{a}{b} \rightarrow \left(\frac{z}{x} = \frac{a}{b} - \frac{y}{x}\right) ou \left(\frac{y}{x} = \frac{a}{b} - \frac{z}{x}\right)$$

Primeiramente vamos igualar $\left(\frac{z}{\mathrm{x}}\right)$ nas equações $(1)\ e\ (2)$.

$$\frac{b}{a}+\frac{y}{x} = \frac{a}{b}-\frac{y}{x} \rightarrow \frac{2y}{x}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\rightarrow\frac{2y}{x}=\frac{a^2-b^2}{ab}\rightarrow\frac{y}{x}=\frac{a^2-b^2}{2ab}$$

$$y = a^2-b^2\ e\ x=2ab$$

Agora vamos igualar $\left(\frac{y}{\mathrm{x}}\right)$ nas equações $(1)\ e\ (2)$:

$$\frac{z}{x}-\frac{b}{a}=\frac{a}{b}-\frac{z}{x} \rightarrow \frac{2z}{x}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\rightarrow\frac{2z}{x}=\frac{a^2+b^2}{ab}\rightarrow\frac{z}{x}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

$$z = a^2+b^2\ e\ x=2ab$$

5 PROPOSTA DIDÁTICA

O teorema de Pitágoras pode ser ensinado e explorado em diversas etapas do ensino, e neste capítulo iremos elaborar uma sequência didática para o ensino do teorema de Pitágoras, ternas pitagóricas e suas propriedades aritméticas partindo do tijolo de Euler como situação problema, como sugere Gutiérrez (1996), quando diz que os preceitos pitagóricos devem ser construídos como um tipo de raciocínio/pensamento baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, tanto mentais, quanto físicos. Ele seria contextualizado ao ser trabalhado o conteúdo de geometria espacial prismas regulares retos. que pode ser aplicado no segundo ou terceiro ano do ensino médio, dependendo da proposta de conteúdos de matemática do currículo estabelecido em cada instituição de ensino.

5.1 ENSINO FUNDAMENTAL

Tendo em vista que o teorema de Pitágoras geralmente é ensinado no nono ano do ensino fundamental, podemos utilizar alguns tópicos apresentados neste trabalho, tais como algumas demonstrações do teorema de Pitágoras, ternas pitagóricas e propriedades aritméticas dos quadrados perfeitos, neste nível de ensino, adaptando a abordagem para que seja possível desenvolver estes conteúdos de modo a produzir uma aprendizagem significativa e que esteja dentro dos objetivos propostos ao ensino de matemática aos alunos do ensino fundamental.

Com base nisso, sugerimos a exposição das demonstrações 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 e 3.2.7 do teorema de Pitágoras, desenvolvidas no Capítulo 3, e seguindo esta proposta de ensino, mostrar alguns exemplos de números naturais x, y, z que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = z^2$, incentivando os alunos a realizar investigações sobre quais características podem ser percebidas sobre as ternas pitagóricas, possibilitando conjecturar uma forma de encontrar ternas pitagóricas primitivas dados valores inteiros a e b definidos em consonância com o Teorema 2. Assim, a construção da tabela abaixo, com valores de x, y, z produzidos através de números a e b previamente determinados, possibilita aos alunos do nono ano um contato inicial com a aritmética das ternas pitagóricas.

Tabela 1 – Listagem parcial de ternas pitagóricas primitivas e não primitivas.

a	***b***	***x***	***y***	***z***
		2.a.b	***a²-b²***	***a²+b²***
2	1	4	3	5
3	1	6	8	10
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	2	16	12	20
4	3	24	7	25
5	1	10	24	26
5	2	20	21	29
5	3	30	16	34
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	2	24	32	40
6	3	36	27	45
6	4	48	20	52
6	5	60	11	61
7	1	14	48	50
7	2	28	45	53
7	3	42	40	58
7	4	56	33	65
7	5	70	24	74
7	6	84	13	85
8	1	16	63	65
8	2	32	60	68
8	3	48	55	73
8	4	64	48	80
8	5	80	39	89
8	6	96	28	100
8	7	112	15	113
9	1	18	80	82
9	2	36	77	85
9	3	54	72	90
9	4	72	65	97
9	5	90	56	106
9	6	108	45	117
9	7	126	32	130
9	8	144	17	145

Fonte: Autores

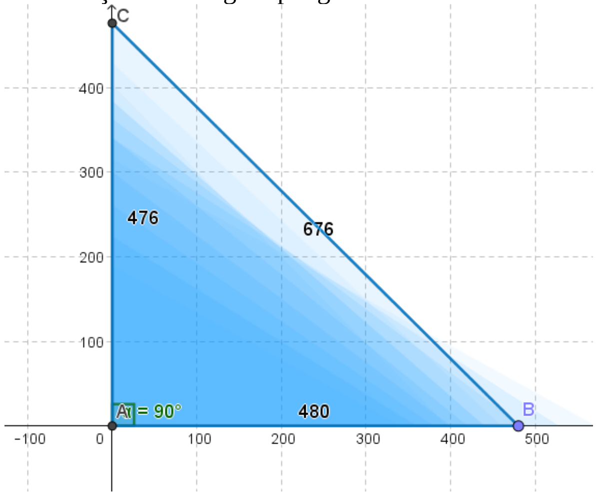
Tabela 2 – Listagem parcial de ternas pitagóricas primitivas.

a	*b*	*x*	*y*	*z*
		2.a.b	a^2-b^2	a^2+b^2
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61
7	2	28	45	53
7	4	56	33	65
7	6	84	13	85
8	1	16	63	65
8	3	48	55	73
8	5	80	39	89
8	7	112	15	113
9	2	36	77	85
9	4	72	65	97
9	8	144	17	145
10	1	20	99	101
10	3	60	91	109
10	7	140	51	149
10	9	180	19	181
11	2	44	117	125
11	4	88	105	137
11	6	132	85	157
11	8	176	57	185
11	10	220	21	221
12	1	24	143	145
12	5	120	119	169
12	7	168	95	193
12	11	264	23	265
13	2	52	165	173
13	4	104	153	185
13	6	156	133	205
13	8	208	105	233
13	10	260	69	269
13	12	312	25	313

Fonte: Autores

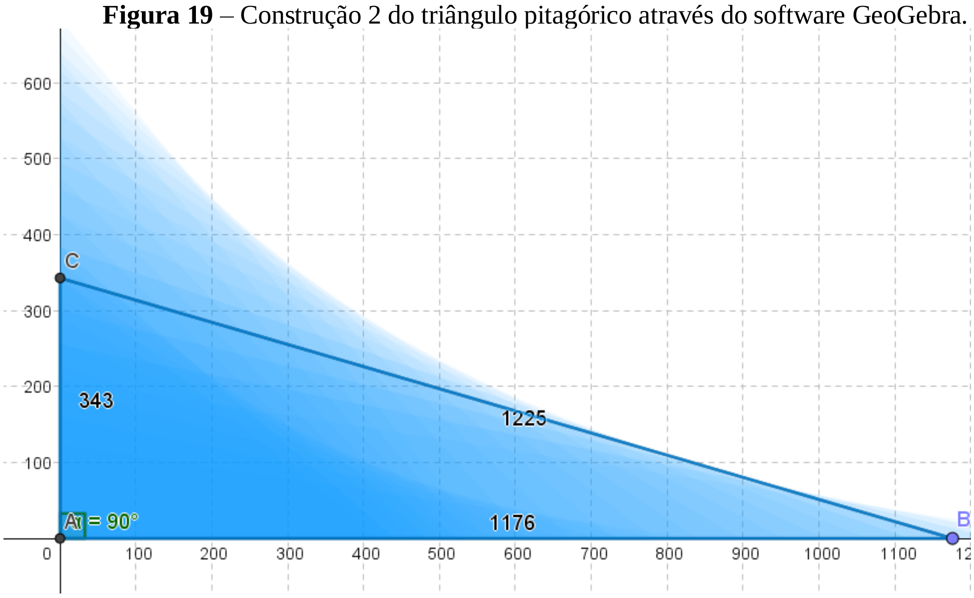
Na sequência, é interessante utilizar um recurso tecnológico para relacionar os valores encontrados na tabela acima com os triângulos retângulos que têm x, y, z como sendo as medidas dos seus lados, onde x e y são catetos e z é a hipotenusa. Para isto, utilizamos o software livre de geometria dinâmica GeoGebra, que permite, através do uso da ferramenta Controle Deslizante definida para valores inteiros m, n (segundo método para determinação das ternas pitagóricas citado acima), gerar vários triângulos retângulos que tem lados medindo números inteiros, ou seja, lados que são ternas pitagóricas. Veja a imagem abaixo, que representa a construção de vários destes triângulos.

Figura 18 – Construção do triângulo pitagórico através do software GeoGebra.



Fonte: Autores

Figura 19 – Construção 2 do triângulo pitagórico através do software GeoGebra.



Fonte: Autores

Para finalizar a abordagem das ternas pitagóricas neste nível de ensino podemos identificar as possíveis relações aritméticas das ternas pitagóricas em relação a paridade dos seus termos. Todo número natural n pode ser escrito em relação a multiplicidade de outros naturais.

Em relação a multiplicidade com número 2:

Todo número natural ℕ pode ser escrito da forma $n = 2k \; ou \; n = 2k + 1 \; n, k \in \mathbb{N}$. logo, tomando $l \in \mathbb{N}$:

$\mathrm{n} = 2\mathrm{k} \; \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{4k}^2 = \mathbf{4l}$

$\mathrm{n} = 2\mathrm{k} + 1 \; \rightarrow \mathrm{n}^2 = 4\mathrm{k}^2 + 4\mathrm{k} + 1 = 4(\mathrm{k}^2 + \mathrm{k}) + 1 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{4l} + \mathbf{1}$

Podemos utilizar os desenvolvimentos acima, juntamente com as relações apresentadas sobre a multiplicidade de um número natural associada ao número 4, apresentado no item 5.2.2. deste trabalho, e apresentar aos alunos a relação que toda terna pitagórica primitiva terá os termos x e y com paridades distintas, de forma similar ao que foi apresentado no capítulo 4 durante a definição das ternas pitagóricas primitivas.

5.2 ENSINO MÉDIO

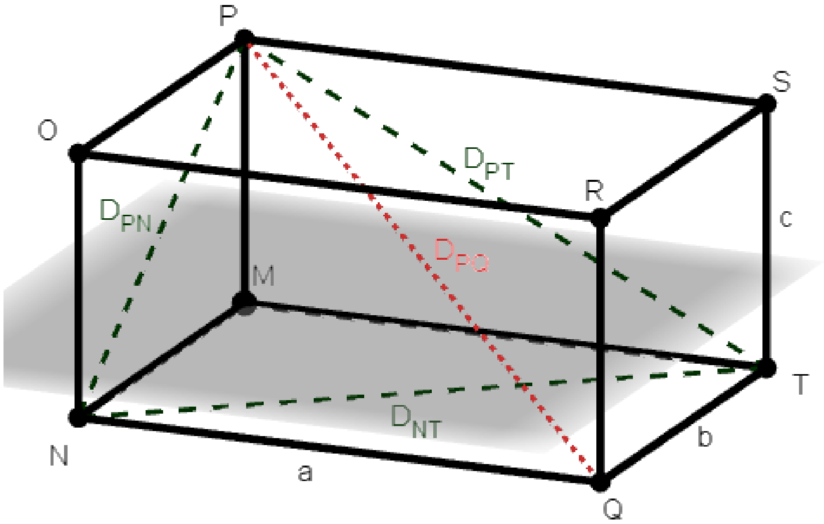
O tópico de geometria espacial onde se trabalha poliedros e prismas e as diagonais destes, dependendo da escola e seu conteúdo proposto, pode variar entre o segundo e o terceiro ano do ensino médio. Com isso, a proposta de se abordar o teorema de Pitágoras e as ternas pitagóricas estaria contribuindo a uma atividade onde, dentro do contexto dos prismas e suas diagonais, se trabalharia com o tijolo de Euler

5.2.1 Tijolo de Euler

Conforme lembra Nascimento (2015), o tijolo de Euler é um paralelepípedo regular com lados de medidas sendo números inteiros a, b, c, onde $a > b > c$, cujas suas diagonais das faces, que serão denominadas por $D_{NT}, D_{PT} \; e \; D_{PN}$, também possuem valores inteiros. Porém, se a diagonal principal deste paralelepípedo também for um número inteiro, chamamos este de tijolo de Euler perfeito. Até o momento não se tem registro de algum paralelepípedo com tal propriedade.

Os tijolos de Euler que não são perfeitos são nominados de imperfeitos, e o menor tijolo de Euler imperfeito foi identificado pelo matemático Halcke no ano 1719 (Nascimento, 2015) e suas dimensões são $a = 240,\ b = 117\ e\ c = 44$, o que resulta nas diagonais das faces $D_{NT} = 267, D_{PT} = 244\ e\ D_{PN} = 125$ diagonal principal $D_{PQ} \cong 382{,}68$. Com o passar do tempo, e com a utilização da computação, acredita-se terem sido conhecidos os 5000 menores tijolos de Euler, onde os cinco primeiros possuem as medidas: 240, 117 e 44; 275, 252 e 240; 693, 480 e 140; 720, 132 e 85; 792, 231 e 160.

Figura 20 – Representação tijolo de Euler através do software GeoGebra.



Fonte: Autores.

5.2.2 Propriedades aritméticas das ternas pitagóricas

Para tratarmos sobre as propriedades aritméticas das ternas pitagóricas, vamos primeiramente analisar as propriedades aritméticas dos quadrados de números naturais a partir das multiplicidades em relação ao 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

MULTIPLICIDADE POR 3

Todo número natural ℕ pode ser escrito da forma $n = 3k, n = 3k + 1\ ou\ n = 3k + 2$, com $n, k, l \in \mathbb{N}$.

$\mathrm{n} = 3\mathrm{k} \rightarrow \mathbf{n^2 = 3l}$

$\mathrm{n} = 3\mathrm{k} + 1 \rightarrow \mathrm{n}^2 = 9\mathrm{k}^2 + 6\mathrm{k} + 1 \rightarrow \mathbf{n^2 = 3l + 1}$

$\mathrm{n} = 3\mathrm{k} + 2 \rightarrow \mathrm{n}^2 = 9\mathrm{k}^2 + 12\mathrm{k} + 4 \rightarrow \mathbf{n^2 = 3l + 1}$

MULTIPLICIDADE POR 4

Todo número natural $\mathbb{N}$ pode ser escrito da forma $n = 4k, n = 4k + 1, n = 4k + 2$ ou $n = 4k + 3,$ com $n, k, l \in \mathbb{N}$. Vale ressaltar que este resultado já foi obtido no capítulo anterior, quando utilizada a forma de um número natural com sendo par ou ímpar, ou seja, $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$.

$\mathrm{n = 4k} \ \rightarrow \mathbf{n^2 = 4l}$

$\mathrm{n = 4k + 1} \ \rightarrow \mathrm{n^2 = 16k^2 + 8k + 1} \rightarrow \mathbf{n^2 = 4l + 1}$

$\mathrm{n = 4k + 2} \ \rightarrow \mathrm{n^2 = 16k^2 + 16k + 4} \rightarrow \mathbf{n^2 = 4l}$

$\mathrm{n = 4k + 3} \ \rightarrow \mathrm{n^2 = 16k^2 + 24k + 9} \rightarrow \mathbf{n^2 = 4l + 1}$

MULTIPLICIDADE POR 5

Todo número natural $\mathbb{N}$ pode ser escrito da forma $n = 5k, n = 5k + 1, n = 5k + 2, n = 5k + 3$ ou $n = 5k + 4$, $n, k, l \in \mathbb{N}$.

$\mathrm{n = 5k} \ \rightarrow \mathbf{n^2 = 5l}$

$\mathrm{n = 5k + 1} \ \rightarrow \mathrm{n^2 = 25k^2 + 10k + 1} \rightarrow \mathbf{n^2 = 5l + 1}$

$\mathrm{n = 5k + 2} \ \rightarrow \mathrm{n^2 = 25k^2 + 20k + 4} \rightarrow \mathbf{n^2 = 5l + 4}$

$\mathrm{n = 5k + 3} \ \rightarrow \mathrm{n^2 = 25k^2 + 30k + 9} \rightarrow \mathbf{n^2 = 5l + 4}$

$\mathrm{n = 5k + 4} \ \rightarrow \mathrm{n^2 = 25k^2 + 40k + 16} \rightarrow \mathbf{n^2 = 5l + 1}$

MULTIPLICIDADE POR 6

Todo número natural $\mathbb{N}$ pode ser escrito da forma $n = 6k, n = 6k + 1, n = 6k + 2, n = 6k + 3,$ $n = 6k + 4$ ou $n = 6k + 5$, com $n, k, l \in \mathbb{N}$.

$\mathrm{n = 6k} \ \rightarrow \mathbf{n^2 = 6l}$

$\mathrm{n = 6k + 1} \ \rightarrow \mathrm{n^2 = 36k^2 + 12k + 1} \rightarrow \mathbf{n^2 = 6l + 1}$

$\mathrm{n = 6k + 2} \ \rightarrow \mathrm{n^2 = 36k^2 + 24k + 4} \rightarrow \mathbf{n^2 = 6l + 4}$

$\mathrm{n = 6k + 3} \ \rightarrow \mathrm{n^2 = 36k^2 + 36k + 9} \rightarrow \mathbf{n^2 = 6l + 3}$

$\mathrm{n = 6k + 4} \ \rightarrow \mathrm{n^2 = 36k^2 + 48k + 16} \rightarrow \mathbf{n^2 = 6l + 4}$

$\mathrm{n = 6k + 5} \ \rightarrow \mathrm{n^2 = 36k^2 + 60k + 25} \rightarrow \mathbf{n^2 = 6l + 1}$

MULTIPLICIDADE POR 7

Todo número natural $\mathbb{N}$ pode ser escrito da forma $n = 7k, n = 7k + 1, n = 7k + 2, n = 7k + 3,\ n = 7k + 4, n = 7k + 5\ ou\ n = 7k + 6$, com $n, k, l \in \mathbb{N}$.

$\mathrm{n} = 7\mathrm{k} \ \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{7l}$

$\mathrm{n} = 7\mathrm{k} + 1 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 49\mathrm{k}^2 + 14\mathrm{k} + 1 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{7l + 1}$

$\mathrm{n} = 7\mathrm{k} + 2 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 49\mathrm{k}^2 + 28\mathrm{k} + 4 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{7l + 4}$

$\mathrm{n} = 7\mathrm{k} + 3 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 49\mathrm{k}^2 + 42\mathrm{k} + 9 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{7l + 2}$

$\mathrm{n} = 7\mathrm{k} + 4 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 49\mathrm{k}^2 + 56\mathrm{k} + 16 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{7l + 2}$

$\mathrm{n} = 7\mathrm{k} + 5 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 49\mathrm{k}^2 + 70\mathrm{k} + 25 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{7l + 4}$

$\mathrm{n} = 7\mathrm{k} + 6 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 49\mathrm{k}^2 + 84\mathrm{k} + 36 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{7l + 1}$

MULTIPLICIDADE POR 8

Todo número natural $\mathbb{N}$ pode ser escrito da forma $\mathrm{n} = 8\mathrm{k}, \mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 1, \mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 2, \mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 3,\ \mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 4, \mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 5, \mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 6$ ou $\mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 7$, com $\mathrm{n}, \mathrm{k}, \mathrm{l} \in \mathbb{N}$.

$\mathrm{n} = 8\mathrm{k} \ \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{64k}^2 = \mathbf{8.8.k}^2 = \mathbf{8l}$

$\mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 1 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 64\mathrm{k}^2 + 16\mathrm{k} + 1 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{8l + 1}$

$\mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 2 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 64\mathrm{k}^2 + 32\mathrm{k} + 4 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{8l + 4}$

$\mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 3 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 64\mathrm{k}^2 + 48\mathrm{k} + 9 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{8l + 1}$

$\mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 4 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 64\mathrm{k}^2 + 64\mathrm{k} + 16 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{8l}$

$\mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 5 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 64\mathrm{k}^2 + 80\mathrm{k} + 25 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{8l + 1}$

$\mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 6 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 64\mathrm{k}^2 + 96\mathrm{k} + 36 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{8l + 4}$

$\mathrm{n} = 8\mathrm{k} + 7 \ \rightarrow \mathrm{n}^2 = 64\mathrm{k}^2 + 112\mathrm{k} + 49 \rightarrow \mathbf{n^2} = \mathbf{8l + 1}$

5.2.3 As ternas pitagóricas em relação as multiplicidades

Perceba que dentro de cada multiplicidade apresentada anteriormente, pode se identificar algumas propriedades aritméticas ou regularidades que os quadrados de números naturais admitem ou obedecem, sendo possível estabelecer uma relação com as ternas pitagóricas.

TERNAS PITAGÓRICAS EM RELAÇÃO A MULTIPLICIDADE POR 3

Dados $r, s \in \mathbb{N}^*$, teremos a possibilidade de formar uma terna pitagórica quando $x^2 = 3r\ e\ y^2 = 3s$ ou $x^2 = 3r\ e\ y^2 = 3s + 1$, ou seja, os formatos de x e y deverão ser $x = 3k\ e\ y = 3l,\ x = 3k\ e\ y = 3l + 1\ ou\ x = 3k\ e\ y = 3l + 2$, com $k, l \in \mathbb{N}$. Analisando as duas possibilidades para x^2 e y^2 teremos $z^2 = 3f\ ou\ z^2 = 3g + 1$, onde $f, g \in \mathbb{N}$. Não podemos ter uma terna da forma $x^2 = 3r + 1\ e\ y^2 = 3s + 1$, pois na soma $x^2 + y^2$ do formato acima teríamos que $z^2 = 3h + 2$, com $h \in \mathbb{N}$, e como vimos anteriormente é impossível um quadrado perfeito ter resto 2 na divisão por 3. Ampliando a análise, é possível identificar que um terno pitagórico primitivo pode ser da forma $x^2 = 3r\ e\ y^2 = 3s + 1$.

Exemplo de ternos primitivos:

$$\mathrm{x}^2 = 3\mathrm{r}\ \text{e}\ \mathrm{y}^2 = 3\mathrm{s} + 1$$

- $\mathrm{x} = 3\mathrm{k}\ \text{e}\ \mathrm{y} = 3\mathrm{l} + 1$

Tomando $\mathrm{k} = 1$ e $\mathrm{l} = 1$, teremos a terna (3,4,5)

- $\mathrm{x} = 3\mathrm{k}\ \text{e}\ \mathrm{y} = 3\mathrm{l} + 2$

Tomando $\mathrm{k} = 4$ e $\mathrm{l} = 1$, teremos a terna (12,5,13)

Perceba que as relações aritméticas desenvolvidas acima permitem considerar que dada uma terna pitagórica primitiva, teremos obrigatoriamente que x ou y será múltiplo de 3.

TERNAS PITAGÓRICAS EM RELAÇÃO A MULTIPLICIDADE POR 4

Dados $r, s \in \mathbb{N}^*$, teremos a possibilidade de formar uma terna pitagórica primitiva $x^2 = 4r\ e\ y^2 = 4s + 1$, ou seja, isso ocorrera quando: $x = 4k\ e\ y = 4l + 1$, $x = 4k\ e\ y = 4l + 3, x = 4k + 2\ e\ y = 4l + 1\ ou\ x = 4k + 2\ e\ y = 4l\ + 3$, com k, $l\ \in \mathbb{N}$.

Pode se observar que tem um cenário onde não poderá ocorrer uma terna pitagórica quando $x = 4k + 1\ e\ y = 4l + 3$, pois disso resultará que $x^2 +\ y^2 =\ 4h + 2$, com $h \in \mathbb{N}$, e como vimos não temos a possibilidade onde um natural ao quadrado dividido por quatro deixa resto 2.

Exemplos de ternas pitagóricas primitivas segundo as relações acima:

- $x = 4k \ e \ y = 4l + 1$

Tomando $k = 5 \ e \ l = 5$, teremos o terno primitivo (20,21,29)

- $x = 4k \ e \ y = 4l + 3$

Tomando $k = 3 \ e \ l = 8$, teremos o terno primitivo (12,35,37)

Para os casos: $x = 4k + 2 \ e \ y = 4l + 1$ ou $x = 4k + 2 \ e \ y = 4l + 3$, veremos posteriormente, na multiplicidade por 8, propriedades que justificarão a impossibilidade desses dois casos citados acima.

TERNAS PITAGÓRICAS EM RELAÇÃO À MULTIPLICIDADE POR 5

Para este tópico poderemos ter diversas possibilidades de combinações para ternos pitagóricos primitivos.

Dados $r, s \in \mathbb{N}^*$, teremos uma terna pitagórica primitiva em 3 casos: $x^2 = 5r \ e \ y^2 = 5s + 1$; $x^2 = 5r \ e \ y^2 = 5s + 4$; ou $x^2 = 5r + 1 \ e \ y^2 = 5s + 4$. Não é muito difícil perceber que cada uma destas 3 possibilidades para os valores de x^2 e y^2 implicam a existência de 4 possibilidades para os valores de x, y, z. Nos dois primeiros casos, em que x^2 (ou y^2) é múltiplo de 5, temos que $x = 5k$, $y = 5l + 1$ ou $y = 5l + 4$ e $z = 5j + 1$ ou $z = 5j + 4$, ou ainda que $x = 5k$, $y = 5l + 2$ ou $y = 5l + 3$ e $z = 5j + 2$ ou $z = 5j + 3$ (já que z^2 é da forma $5t + 1$ ou $5t + 4$), com $k, l, j, t \in \mathbb{N}$. No último caso, temos que $x = 5k$+1 ou $x = 5k$+4, $y = 5l + 2$ ou $y = 5l + 3$ e $z = 5j$ (já que z^2 é da forma $5t$). Vamos listar estas 12 possibilidades abaixo com um exemplo de terna pitagórica primitivo de cada caso.

Considerando $k, l, j \in \mathbb{N}$, seguem as possibilidades e exemplos numéricos:

- $x = 5k, \ y = 5l + 1, z = 5j + 4$

Tomando k = 4, l = 4 e $j = 5$ teremos a terna primitiva (20, 21, 29)

- $x = 5k, y = 5l + 2, \mathrm{z} = 5\mathrm{j} + 3$

Tomando $k = 1$, $l = 2 \ e \ j = 2$, teremos a terna primitiva (5, 12, 13)

- $x = 5k, y = 5l + 3, \mathrm{z} = 5\mathrm{j} + 2$

Tomando $k = 3$, $l = 1 \ e \ j = 3$, teremos a terna primitiva (15, 8, 17)

- $x = 5k, y = 5l + 4, \mathrm{z} = 5\mathrm{j} + 1$

Tomando $k = 8$, $l = 1$ e $j = 8$,teremos a terna primitiva (40, 9, 41)

- $x = 5k + 1,\ y = 5l + 2, \mathrm{z} = 5\mathrm{j}$

Tomando $k = 7$, $l = 15$ e $j = 17$, teremos a terna primitiva (36, 77, 85)

- $x = 5k + 1,\ y = 5l + 3, \mathrm{z} = 5\mathrm{j}$

Tomando $k = 11$, $l = 6$ e $j = 13$, teremos a terna primitiva (56, 33, 65)

- $x = 5k + 4, y = 5l + 2, \mathrm{z} = 5\mathrm{j}$

Tomando $k = 4$, $l = 1$ e $j = 5$, teremos a terna primitiva (24, 7, 25)

- $x = 5k + 4, y = 5l + 3,\ \mathrm{z} = 5\mathrm{j}$

Tomando $k = 16$, $l = 2$ e $j = 17$, teremos a terna primitiva (84, 13, 85)

Analogamente ao que vimos na multiplicidade 4, também existirão casos onde não teremos ternos pitagóricos: $z^2 = (5r + 1) + (5s + 1)\ ou\ z^2 = (5r + 4) + (5s + 4)$. Pois teríamos respectivamente em cada caso que $z^2 = 5g + 2$ ou $z^2 = 5g + 3$, com $g \in \mathbb{N}$, e como vimos no tópico das multiplicidades por 5, não temos um quadrado perfeito com resto 2 ou 3 ao dividi-lo por 5.

Pode se perceber nas ternas pitagóricas primitivas que se caso x ou y não for múltiplo de 5, acontecerá que z será múltiplo de 5.

TERNAS PITAGÓRICAS EM RELAÇÃO A MULTIPLICIDADE POR 6

Estas relações identificadas em relação a multiplicidade 6, serão interessantes para averiguarmos mais características em relação ao terno pitagórico.

Dentro das diversas possibilidades de combinações que possibilitam ternas pitagóricos só teremos uma primitiva quando $x^2 = 6r\ e\ y^2 = 6s + 1$ ou $x^2 = 6r + 4\ e\ y^2 = 6s + 3$ com $r, s \in \mathbb{N}^*$. Com isso x será da forma $x = 6k$ e y será da forma $y = 6l + 1$ ou $y = 6l + 5$, e no segundo caso, x será da forma $x = 6k + 2$ ou $x = 6k + 4$ e $y = 6l + 3$, com $r, s \in \mathbb{N}$. O que permite concluir:

- análogo a multiplicidade por 3, que toda terna pitagórica terá um termo múltiplo de 3;
- Se $x^2 = 6r\ \rightarrow\ x = 6k$, logo r será par; e pelo critério da paridade dos termos da terna pitagórica, k também será par, logo para esse caso x será múltiplo de 12;
- Se x ou y for da forma $6k + 3$, ele será múltiplo de 3 e ímpar, logo o outro

termo será par.

Uma análise rápida das multiplicidades por 6 permite aferir que a combinação $x^2 = 6r + 1\ e\ y^2 = 6s + 3$ possibilitaria uma terna pitagórica primitiva, porém como elas apenas surgem de um $x = 6k + 1\ e\ y = 6l + 3\ ou\ x = 6k + 5\ e\ y = 6l + 3$, ocorre que para qualquer valor de k e l teremos dois termos ímpares, e como vimos um dos dois tem que ser par, logo essa combinação $x^2 = 6r + 1\ e\ y^2 = 6s + 3$ não gera uma terna pitagórica primitiva. Outra combinação que não fornecerá uma terna primitiva é $x^2 = 6r + 1\ e\ y^2 = 6s + 4$, pois ao operarmos $x^2 + y^2 = 6r + 1 + 6s + 4 = 6(r + s) + 5 \rightarrow x^2 + y^2 = 6t + 5$, com $t \in \mathbb{N}$. E como vimos nas multiplicidades por 6, não temos um natural ao quadrado da forma $6t + 5$.

TERNAS PITAGÓRICAS EM RELAÇÃO A MULTIPLICIDADE POR 7

Existem três peculiaridades das ternas pitagóricas primitivas em relação a multiplicidade por 7. A primeira é que se um dos termos x ou y, for múltiplo de 7, ou seja $x = 7k\ ou\ y = 7\mathrm{k}$, com $k \in \mathbb{N}$, o outro termo será da forma: $7\mathrm{l} + 1$, $7\mathrm{l} + 2, 7\mathrm{l} + 3, 7\mathrm{l} + 4, 7\mathrm{l} + 5$ ou $7\mathrm{l} + 6$, onde $l \in \mathbb{N}$. A segunda são as seguintes possibilidades de combinações que geram ternas pitagóricas primitivas: $x = 7k + 1\ e\ y = 7\mathrm{l} + 6, x = 7k + 2\ e\ y = 7\mathrm{l} + 5$ e $x = 7k + 3\ e\ y = 7\mathrm{l} + 4$. Perceba que os restos de cada dupla x e y somados resulta em 7. A terceira se relaciona com as outras possíveis combinações que geram ternas pitagóricas primitivas: $x = 7k + 1\ e\ y = 7\mathrm{l} + 1$, $x = 7k + 2\ e\ y = 7\mathrm{l} + 2, x = 7k + 3\ e\ y = 7\mathrm{l} + 3, x = 7k + 4\ e\ y = 7\mathrm{l} + 4$, $x = 7k + 5\ e\ y = 7\mathrm{l} + 5$ ou $x = 7k + 6\ e\ y = 7\mathrm{l} + 6$. Essas relações possibilitam gerar ternas pitagóricas primitivas, porém deve se cuidar ao determinar os coeficientes k e l para que ambos termos x e y não resultem em dois ímpares ou dois pares.

As outras possibilidades de combinações não resultarão em ternas pitagóricas, observe o desenvolvimento abaixo:

Considerando $r, s, t \in \mathbb{N}^*$;

- $\mathrm{x}^2 = 7\mathrm{r} + 1$ e $\mathrm{y}^2 = 7\mathrm{s} + 2$

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{z}^2 \rightarrow \mathrm{z}^2 = 7\mathrm{r} + 1 + 7\mathrm{s} + 2 = 7(\mathrm{r} + \mathrm{s}) + 3 \rightarrow \mathrm{z}^2 = 7\mathrm{t} + 3$$

Através das relações de multiplicidade por 7, não temos um número natural da forma $z^2 = 7t + 3$, mostrando que essa associação não fornece uma terna pitagórica.

- $x^2 = 7r + 1$ e $y^2 = 7s + 4$

$$x^2 + y^2 = z^2 \rightarrow z^2 = 7r + 1 + 7s + 4 = 7(r + s) + 5 \rightarrow z^2 = 7t + 5$$

Através das relações de multiplicidade por 7, não temos um número natural da forma $z^2 = 7t + 5$, mostrando que essa associação não fornece uma terna pitagórica.

- $x^2 = 7r + 2$ e $y^2 = 7s + 4$

$$x^2 + y^2 = z^2 \rightarrow z^2 = 7r + 2 + 7s + 4 = 7(r + s) + 6 \rightarrow z^2 = 7t + 6$$

Através das relações de multiplicidade por 7, não temos um número natural da forma $z^2 = 7t + 6$, mostrando que essa associação não fornece uma terna pitagórica.

TERNAS PITAGÓRICAS EM RELAÇÃO À MULTIPLICIDADE POR 8

As ternas pitagóricas primitivas em relação a multiplicidade 8 possui uma característica muito curiosa. Dentre as diversas possibilidades de se gerar ternos pitagóricos, só é possível gerar primitivas com a combinação $x^2 = 8r\ e\ y^2 = 8s + 1$, com $r, s \in \mathbb{N}^*$. Vale ressaltar que não necessariamente será nessa especifica ordem, a terna pode se apresentar também da forma $y^2 = 8r\ e\ x^2 = 8s + 1$. Todas as outras possibilidades geram ternas pitagóricas não primitivas, ou não possibilitam gerá-las.

Ampliando a análise acima, para as observações que seguem vamos adotar como $x^2 = 8r\ e\ y^2 = 8s + 1$, x será da forma $x = 8r$ ou $x = 8r + 4$ e $y = 8r + 1, y = 8r + 3, y = 8r + 5\ ou\ y = 8r + 7$. O que permite concluir que toda terna pitagórica terá um dos termos múltiplo de 4. Com isso, justiça-se por que os casos apresentados no tópico das ternas em relação a multiplicidade por 4, foram $x = 4k + 2\ e\ y = 4l + 1$ ou $x = 4k + 2\ e\ y = 4l + 3$, com k e $l \in \mathbb{N}$, não constituem uma terna pitagórica. Perceba que indiferente dos valores aplicados para k e l, nenhum dos termos será múltiplo de 4.

A seguir mostraremos quatro problemas que consideramos aplicações do que foi estudado até o momento, corroborando com a metodologia definida por Lima (2007) e adotada neste trabalho. Estes problemas são acessíveis aos estudantes da educação básica e de possível compreensão e manipulação por parte dos mesmos, alinham-se ao tratamento dado por Pitágoras e pelos gregos, no sentido da concepção abstrata do conhecimento e relação da aritmética e geometria, e trazem curiosidades e generalizações interessantes sobre as ternas e o triângulo retângulo em sua essência (medidas dos lados sendo números naturais).

Problema 1: Dados dois números naturais a e b tais que $a^2 + b^2$ é divisível por 21. Prove que a mesma soma de quadrados também é divisível por 441.

Resolução:

Do enunciado temos que $a^2 + b^2 = 21q$, com $q \in \mathbb{Z}$. E ele quer que mostremos que $a^2 + b^2 = 441t$, com $t \in \mathbb{Z}$, logo podemos reescrever a primeira expressão da seguinte forma:

$$a^2 + b^2 = 3.7.q$$

Portanto:

$$3|a^2 e\ 3|b^2, \text{ e com isso } 3|a\ e\ 3|b$$

e,

$$7|a^2 e\ 7|b^2, \text{ e com isso } 7|a\ e\ 7|b$$

Logo a é da forma $a = 3.7.m = 21m$, com $m \in \mathbb{Z}$. Assim como b é da forma $b = 3.7.n = 21n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Seguindo, temos que:

$$a^2 = (21m)^2 = 21^2m^2 = 441m^2$$

$$b^2 = (21n)^2 = 21^2n^2 = 441n^2$$

E, portanto,

$$a^2 + b^2 = 441m^2 + 441n^2$$

$$a^2 + b^2 = 441(m^2 + n^2)$$

Considerando $(m^2 + n^2) = t$, com $t \in \mathbb{Z}$, teremos:

$$a^2 + b^2 = 441t$$

Problema 2: Mostre se é possível encontrar valores (x, y, k) tal que $x^2 + y^2 = 4k - 1$.

Resolução:

Como se verificou no capítulo 5.2.2, todo número natural ao quadrado, em relação a multiplicidade por 4, deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4. Portanto, ao efetuarmos a soma desses quadrados nunca teremos resto -1 na divisão por 4, o que equivale a dizer que nunca teremos resto 3 na divisão por 4, pois $-1 \equiv 3 \; mod \; 4$. Portanto essa equação não tem solução nos inteiros.

Problema 3: Dado x pertencente aos naturais, mostre que, se $x \geq 3$, existe um triângulo retângulo com cateto x.

Resolução:

Caso x seja ímpar, vamos adotar $u = x^2$ e $v = 1$. Como $x \geq 3$, $u > v$. Caso x seja par, tomamos $u = \frac{x^2}{2}$ e $v = 2$. Como $x \geq 4$, $u > v$. A partir disso, utilizaremos o teorema 1, onde $x = \sqrt{uv}, y = \frac{u-v}{2} \; e \; z = \frac{u+v}{2}$, onde $u > v$ e $u \; e \; v$ tem mesma paridade. Perceba que $x = \sqrt{uv} \rightarrow x^2 = u.v$.

Problema 4: Mostre que existem infinitos triângulos retângulos com um de seus catetos e a hipotenusa números consecutivos.

Resolução:

Para cada valor ímpar adotado em x, $x \geq 3$, tomamos $u = x^2$ e $v = 1$, respeitando $u > v$. Sendo assim, pelo teorema 1 temos;

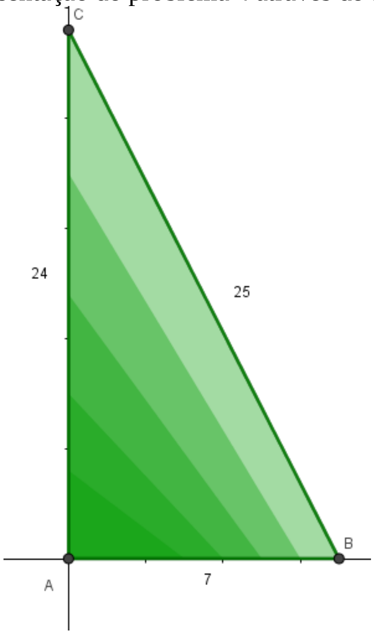
$$y = \frac{u-v}{2} = \frac{x^2-1}{2}$$

$$y = \frac{x^2-1}{2}$$

$$z = \frac{u+v}{2} = \frac{x^2+1}{2} = \frac{x^2-1}{2} + 1 = \frac{u-v}{2} + 1 = y + 1$$

$$z = y + 1$$

Figura 21 – Representação do problema 4 através do software Geogebra.



Fonte: Autores.

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho buscou apresentar uma proposta de ensino que aborde um recorte da aritmética presente no teorema de Pitágoras através das ternas pitagóricas a partir da perspectiva de ensino que aponta LIMA (2007).

Lima (2007) indica que o ensino de matemática seja norteado a partir de três componentes fundamentais já citados anteriormente no texto: conceituação, manipulação e aplicações, e este projeto se orientou tendo como base essa concepção, procurando ser um material que pudesse servir de apoio aos professores de matemática atuantes no ensino básico. Nos capítulos desenvolvidos neste trabalho, procuramos conectar os três fundamentos, mas algumas correlações serão desenvolvidas neste momento. Ainda sobre os conceitos, vale ressaltar que não há uma ordenação linear fixa do emprego dos mesmos, ficando a cargo do professor, de forma ponderada, administrar os momentos de cada um.

A ideia de *conceituação* proposta por Lima (2007) está presente no texto em diferentes momentos, como podemos identificar através do enunciado do capítulo 3, no capítulo 4 e os teoremas presentes nele, assim como os itens 5.2.1 e 5.2.2. De diferentes maneiras estes recortes citados se enquadram na ideia de *conceituação*. Neles são apresentados os conceitos de cada tópico que seria trabalhado procurando serem objetivos e claros dentro das definições matemáticas que os limitam conforme sugere o autor.

Analisando o texto a partir do conceito de *manipulação* proposta por LIMA (2007), temos que:

> A *manipulação* de caráter principalmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado da Matemática, assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a música.[...] A habilidade e a destreza no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-o da perda de tempo e energia com detalhes secundários. (LIMA, 2007, p. 154).

Aliado a este conceito podemos considerar o que GRAVINA (1998) indica sobre a matemática como área do conhecimento:

> [...] é desenvolvimento de conceitos e teoremas que vão constituir uma estrutura matemáticas. O objetivo é a descoberta de regularidades e de invariantes, cuja evidência se estabelece pela demonstração baseada no raciocínio lógico e mediado tão somente pelos axiomas de fundamentação da estrutura e teoremas já destes deduzidos. É investigação no plano puramente

matemático.

Neste sentido, apresentamos diversos desenvolvimentos algébricos e geométricos, notáveis nos subcapítulos das multiplicidades em relação aos números inteiros, características aritméticas das ternas pitagóricas em relação a essas multiplicidades, e também algumas demonstrações do teorema de Pitágoras, mostrando que é possível relacionar três áreas da matemática que em alguns momentos são tomadas como distintas e sem convergência alguma: álgebra, aritmética e geometria.

As demonstrações do famoso e importantíssimo teorema de Pitágoras foram desenvolvidas e selecionadas a partir de uma análise bibliográfica de livros dos ensinos fundamental e médio e seus respectivos conteúdos programáticos onde, ao final de cada subcapítulo, há referência dos livros selecionados, incentivado cada uma das inserções de acordo com o conteúdo programático dos currículos escolares bem como a literatura utilizada pelo professor.

Sobre as relações aritméticas presentes nas ternas pitagóricas quando analisadas a partir das multiplicidades por números naturais, onde neste trabalho foram desenvolvidas as multiplicidades de 3 a 8, pode se considerar algumas conclusões. Foi constatado no tópico das ternas em relação a multiplicidade por 3, e também na multiplicidade por 6, que toda terna terá um de seus termos múltiplos de 3, assim como na verificação das ternas em relação a multiplicidade por 8 que toda terna terá um de seus termos x ou y múltiplo de 4, o que permite concluir que em toda terna pitagórica primitiva (x, y, z), o produto $x.y$ será múltiplo de 12, ou seja, $x.y = 12k$, com $k \in \mathbb{N}$. Complementando esta análise, constatou-se que as ternas pitagóricas em relação à multiplicidade por 5, possui um de seus termos, x, y ou z, múltiplo de 5. Portanto pode-se inferir que, dada uma terna pitagórica primitiva (x, y, z), o produto $x.y.z$ será sempre múltiplo de 60, ou seja, $x.y.z = 60l$, com $l \in \mathbb{N}$..

Na ideia do conceito *aplicações* apresentada por Lima (2007), o tijolo de Euler se destaca. Os professores podem considerar as medidas lineares deste paralelepípedo e fazer as correlações matemáticas existentes, podendo também em um segundo momento construí-lo com material concreto, utilizando escalas para produzir as arestas e diagonais que formam ternas pitagóricas em cada face, possibilitando a aplicação dos conceitos aritméticos estudados em um objeto real e manipulável e com características peculiares. Sobre as dimensões do tijolo de Euler pode se associar com as relações das ternas pitagóricas identificadas. O menor tijolo de Euler possui as arestas medindo $a = 240$,

$b = 117 \ e \ c = 44$, resultando nas diagonais (figura 18) $D_{NT} = 267, D_{PT} = 244 \ e \ D_{PN} = 125$. Das faces do paralelepípedo se destacam três triângulos retângulos cujas ternas são: $(240, 117, 267), (240, 44, 244) \ e \ (44, 117, 125)$. Percebe-se que não são ternas pitagóricas primitivas, porém as relações aritméticas que comentamos acima continuam válidas: todas tem um termo múltiplo de 3, um termo múltiplo de 4 e um termo múltiplo de 5.

Por fim, esperamos que a proposta de mesclar tópicos da história da matemática como propulsor da curiosidade dos alunos, explorar demonstrações algébricas e geométricas do teorema de Pitágoras, utilizar tópicos de geometria espacial (tijolo de Euler) como situação problema para o estudo de ternas pitagóricas, e a partir destas realizar um estudo prazeroso, mas com rigor matemático merecido de tópicos de teoria dos números (aritmética), vislumbrem os professores de matemática da educação básica, principalmente do ensino médio, em consonância com LIMA (2007), a possibilidade de:

> [...] fazer com que, ao final dos seus três anos, o aluno egresso da Escola Média tenha adquirido, mesmo que seja mediante o estudo de temas elementares, uma ideia bastante clara do que é Matemática, dos seus métodos, seu alcance, sua utilidade, sua relevância social e sua beleza. (LIMA, 2007, p.197).

Sendo assim, o nosso esforço para que haja conexão entre conteúdos de matemática estudados em todos os níveis da educação, seja no ensino básico ou no ensino superior, pode contribuir consideravelmente para a formação dos professores e para um ensino de matemática de qualidade a todos os que desejam compreender e explorar esta ciência encantadora, elegante e transformadora. Temos ciência que poderá surgir situações adversas durante a aplicação da proposta deste trabalho, tais como falta de tempo para uma abordagem completa, necessidade de conhecimentos prévios sobre alguns assuntos, implicando na retomada de outros conceitos como paridade, divisibilidade, máximo divisor comum, entre outros. Mas são situações que surgem ou podem surgir em qualquer turma, independentemente do nível de ensino, não devendo servir de justificativa para a não aplicação desta proposta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, José Fernandes Silva. **Tópicos especiais em Álgebra**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ALMEIDA, Nilze de. **Matemática:** ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 1.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática:** interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016. v. 1.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, 2012. v. 1.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, 2000. v. único.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. **Círculos matemáticos:** a experiência russa**.** 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: ATLAS, 2002.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. **A Aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados**. IV Congresso RIBIE. Brasília, 1998.

GUTIÉRREZ, A. **Visualization in 3-Dimensional Geometry**: In Search of a Framework. in PUIG, L. e GUTIÉRREZ, A.(eds). Proceedings of the 20th PME Conference. Spain: University of Valence, July, v.1, p.3-19, 1996.

IEZZI, Gelson; *et al*. **Matemática:** realidade & tecnologia. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018. v. 9.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. **Matemática:** matemática e realidade**.** 8ª serie**.** 4. ed. rev. São Paulo: Atual, 2000.

KAHN, C. H. **Pitágoras e os pitagóricos:** uma breve história. Tradução Luís Carlos Borges. São Paulo: Loyola, 1993.

LIMA, Elon Lages, **Matemática e ensino**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, Elon Lages; *et al*. **Temas e problemas elementares**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOOMIS, Elisha Scott. **The Pythagorean Proposition.** Washington D.C. 1968.

MELLO, Danilo Nenen de; *et al*. **Todas as coisas são números:** o pensamento pitagórico presente no ensino médio**.** In: 14.° CONEX CONVERSANDO SOBRE EXTENSAO, 2016, Ponta Grossa. *Anais*... Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2016.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti de; DAVID, Maria Augusta M.S. **A formação matemática do professor:** licenciatura e pratica docente escolar. 2. ed. Belo Horizonte. Autentica Editora: 2016.

NASCIMENTO, Sebastiao Vieira do. **O tijolo de Euler.** Publicado por Kleber Kilhian em 11/07/2015. Disponível em: < https://www.obaricentrodamente.com/2015/07/o-tijolo-de-euler.html>. Acesso em 18 de Agosto de 2019.

NASCIMENTO, Thais Silva do. **Propriedade do Grupo dos Ternos Pitagóricos**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura Em Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso, 2010

OLIVEIRA, Carlos N. C. de; FUGITA, Felipe. **Matemática:** geração alpha. 2. ed. São Paulo: SM, 2018. v. 8.

OLIVEIRA, Carlos N. C. de; FUGITA, Felipe. **Matemática:** geração alpha. 2. ed. São Paulo: SM, 2018. v. 9.

OLIVEIRA, CARLOS N. C. DE; *et al*. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2011. v. 2.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2011. v. 1

STRATHERN, P. **Pitágoras e seu teorema em 90 minutos**. Tradução Marcus Penchel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

SANTOS, Ana M. Q. dos; SANTOS, Fabio H. da Costa; OLIVEIRA, Reinaldo Melo de. **Teorema de Pitágoras:** demonstrações. Orientador: Steve Araujo. 2015. Trabalho de conclusão de curso (Superior Licenciatura Plena em Matemática,) - Universidade Federal do Amapá, [S. l.], 2015.

SANTOS, Marconi Coelho dos. **Teorema de Pitágoras**: suas diversas demonstrações. 2011. 2011 (Especialização em educação matemática) - Universidade Estadual da Paraiba, [S. l.], 2011.

SILVA, João Evangelista Brito da. **Teorema de Pitágoras**: algumas extensões/generalizações e atividades com o Software GeoGebra. 2014. Dissertação (Mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, [S. l.], 2014.

SOUZA, Joamir. **Matemática: novo olhar.** 2. ed. São Paulo: FTD, 2013. v. 1.

TORKOMIAM, Monica M. G. **Matemática:** para viver juntos. 1. ed. São Paulo: SM, 2008. v. 9

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas**: Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 86 p.

https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-zhoubi-suanjing <acessado em 04/11/2019 18:53>